# 数理经济学基础

杨小凯 编 茅于轼 审校

国防工业出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

# 数理经济学基础

杨小凯　编
茅于轼　审校

国防工业出版社

## 内容简介

本书深入浅出地介绍了广义数理经济学基础，利用数学的严密的推理和演绎的方法剖析各种经济现象之间的关系，从理论上阐述了经济学的规律。结合经济实践，用数理经济的原理探讨了提高经济效益的各种途径。在论述经济结构的最优化问题中所提出的分工理论，为研究经济结构、信息流通和经济增长的关系、生产力布局、交通运输业的作用以及贸易等问题提供了新的方法。

本书可供具有工科大学数学水平的读者阅读。

2588/186
67

**数理经济学基础**

杨小凯 编

茅于轼 审校

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32　印张11 1/4　247千字

1985年6月第一版　1985年6月第一次印刷　印数：0,001— 9,500册

统一书号：15034·2859　　定价：1.75元

# 序

数理经济学在我国还是一门陌生的学科，只有极少数的大专院校里开设有这门课程，公开出版的数理经济学的书籍几乎还没有。在这种情况下，本书的问世是值得我国经济界大加庆贺的。

什么是数理经济学？

数理经济学可以说就是理论经济学。因为它所讨论的问题正是经济学中最根本的问题；它所建立起来的各种经济现象之间的关系，正是经济学最本质的规律。它以最少量的假定作为基础，利用数学的严密的推理和演绎的方法，导出了一系列的结果。这些结果互相有着逻辑上的联系，有先后，有层次。因此，数理方法赋予经济学以结构，成为数理经济学。传统上认为属于社会科学的经济学，现在由于数学推理方法的引用而具备了自然科学的形态。由于这些原因，数理经济学不妨称之为理论经济学。它将有别于历史的、经验的、记述性的经济学，作为经济学的基础而存在着。

从上个世纪末以来，杰出的经济学家逐渐明确了阐明经济规律必须借助于几何图形和数学。但起初由于经济界对这些方法不熟悉，这类表述方法常作为注解和附录出现。近四、五十年来，情况有了明显地变化。今天正规的经济学教科书已离不开大量图表曲线和数学式子。如果随便翻开一本《美国经济评论》一类的经济学杂志可以发现，几乎没有一篇文章不用到数学公式。从这一点来看，现代经济学的杂志和空

气动力学的杂志已没有什么差别。再看从 1969 年颁发诺贝尔经济学奖金以来，得奖的经济学巨子几乎全都在数理经济学方面有极高的造诣，或者就是因为发展了数理经济学。这可以从他们在授奖仪式上发表演说的题目而窥其一斑，例如："分析经济学中的极大原则"（保罗・A・萨缪尔森），"一般经济均衡：目的、分析技巧、集体选择"（肯尼思・J・阿罗），"最优化概念及其应用"（T・C・库普曼），"数学在经济中的应用：成就、困难、前景"（勒・康托罗维奇）。这些题目都是与数理经济学密切有关的课题。现代的经济学就是由这样一批领头人物，沿着这样的方向开拓前进的。

利用数学已经建立起来的一系列公式和定理，特别是利用描述复杂事物之间关系的多元微积分和矩阵代数以及抽象空间的概念来研究经济现象，确实给我们带来了极大的方便。尤其是贯穿在整个数学中的精确而客观的思考方法，使得对经济问题的认识不再模棱两可。数理经济学中推导得出的各种关系，概念清楚、表达精确，因而具有巨大的说服力，由于推导过程中的思路明确而清晰，万一对所得到的结论发生怀疑时，我们可以追溯每一步的前提条件和逻辑关系，因而不难发现任何可能存在的疏忽和漏洞。当经济学家之间意见不一致的时候，依靠数理经济学的解析方法，很容易发现他们之间的分歧所在。这为讨论问题提供了共同的语言，不但可以提高讨论问题的效率，而且明确彼此前提的差别，为进一步澄清问题指出研究方向。

当然，不利用数学方法同样可以学好经济学，可以掌握经济学的要义，但毕竟是事倍而功半。正好象不懂得数学也可以学好力学，只要通过对大量实际力学现象的分析和归纳，再掌握用自然语言表述的各种力学关系。爱因斯坦在他的

《狭义与广义相对论浅说》，冯卡尔曼在他的《空气动力学的发展》中就采用了这种表述方式。现代经济学的论著中也有这样的例子。但如果比较一下借助和不借助数学的两种表述方法，可以肯定前一种方法更为简便有效。正因为如此，现在很少有人不借用数学工具来学力学，后一种方法只有在普及科学知识的场合下，为了方便不熟悉数学的人了解力学才勉强采用。经济学也正处于同样的情况。

数理经济学之所以能得到许多明确的结果，是因为它普遍地采用了形式逻辑的思维方法，然而这一方法同时又给它带来了局限性。由于科学的发展和文化的进步以及社会各成员和集团之间立场的不同，使得经济经常处于变动之中。从而以短期最优作为目标的结果常常与长期的目标矛盾；个体或局部的利益也会与整体利益冲突。例如较高的商品价格对应着较少的需求量，但是涨价往往反而诱导出更多的需求，因为人们预期价格还会升得更高。又如节俭无疑是一种美德，但全社会过度的节俭却会使整个经济周转不灵。这些例子说明经济研究需要从运动中，从各个不同的联系方面去把握其规律，这是我们在学习数理经济学中应当注意的。

回顾数理经济学在我国的现状，人们可能会问，何以它的推广和应用如此之迟缓呢？原因是多方面的，但其中最主要的一个原因，或许是人们以为它是总结了资本主义社会的经济规律，我国的社会制度不同，这些规律未必能够应用。但事实并非如此。不论在何种社会制度下，经济现象的最根本的规律是一致的。杨小凯同志在这本书中正在这一点上做出了贡献。他随时注意到将数理经济的原理应用到我国的经济实践，他特别指出应用数理经济学来提高经济效益的各种途径，这正是我国的经济学家们要着重解决的问题。不过，

我们也要注意一点，经济学的基本原理和经济政策不是一回事。同样的空气动力学方程会给出同样的机翼设计，但同样的经济学原理不会得出同样的经济政策，因为这些原理作用的“介质”和“边界条件”不同，因为每个国家的资源秉赋，经济发展的阶段，人民的生活习惯以及政策目标是不同的。

特别值得一提的是杨小凯同志在本书中提出的分工理论，这在这门国际上已经相当成熟的数理经济学中还是首次提出来，这是杨小凯同志对数理经济学的一个创造性的贡献。分工理论解释了分工得到的社会经济效果如何被流通效率所限制。这为研究经济结构、信息流通和经济增长的关系、生产力布局、交通运输业的作用以及国际贸易等一系列经济学中的重要问题开辟了一个新的研究园地。

本书的叙述深入浅出，具有工科大学数学水平的同志就可以看懂，书中还介绍了许多饶有兴味的经济实例。相信读者一定会从这本书的阅读中感到快慰，并得到新的知识。

茅于轼

# 目　录

引言 …………………………………………………………………… 1
第一章　经济规律的定性定量描述 ……………………………10
§1.1　经济规律的定性分析 ……………………………………10
§1.2　增长函数 ……………………………………………………14
§1.3　复利函数 ……………………………………………………17
§1.4　Gompertz增长曲线 ………………………………………26
§1.5　学习曲线 ……………………………………………………29
§1.6　函数的弹性 …………………………………………………32
§1.7　洛仑兹曲线与基尼系数 …………………………………35
§1.8　分工协作的数学描述 ……………………………………43
第二章　消费者的经济效果及其最优化 ……………………59
§2.1　效用函数 ……………………………………………………59
§2.2　效用函数的特性及消费者最优经济效果的充分条件 ……71
§2.3　消费者最优经济效果的实证分析 ………………………86
§2.4　间接效用函数和 AIDS ……………………………………104
§2.5　消费者最优经济效果之比较静态分析和需求函数特性…109
§2.6　消费者作为商品需求者和作为劳动时间、储蓄资金供给者的最优经济效果问题……………………………134
§2.7　多个消费者的最优经济效果问题………………………140
§2.8　动态需求系统………………………………………………146
第三章　生产者的最优经济效果 ………………………………152
§3.1　投入产出生产函数…………………………………………152
§3.2　Cobb-Douglas 和 CES 生产函数…………………………156
§3.3　生产者的最优经济效果——费用最小化…………………181

§3.4 拉氏乘数之经济学意义——影子价格和影子费用……186
§3.5 生产者追求最优经济效果的行为规律转化为生产者对投入的需求函数和对产出的供给函数……188
§3.6 资源有限的情况下的最优经济效果……193
§3.7 多个生产者的最优经济效果……197
§3.8 用线性规划研究生产者的最优经济效果和导出数字式供给函数……205
第四章 消费者和生产者的综合最优经济效果……225
§4.1 Pareto 最优境界（Pareto 均衡）……225
§4.2 简单的可计算一般均衡（CGE）模型……241
§4.3 二阶段 CGE 模型……249
§4.4 局部均衡和一般均衡的稳定性……259
第五章 经济结构的最优化……272
§5.1 分工度与流通……272
§5.2 分工度与生产效率……280
§5.3 用线性规划求解最优分工结构……291
§5.4 对偶规划解与分工的人为阻力……302
§5.5 综合考虑最优经济结构和资源最优分配的模型……308
§5.6 可计算工业布局最优集中度的混合整数规划模型……311
第六章 经济体制和竞争效率对经济效果的影响……327
§6.1 独家经营企业追求其最优经济效果的一般规律……327
§6.2 垄断对实现 Pareto 最优境界的干扰……330
§6.3 二元竞争的古诺模型……333
§6.4 价格集中控制和配给制对最优经济效果的影响……344
§6.5 买方的独家经营……346
参考文献……349

# 引　言

“科学的本质是数学”。

——Descartes

“科学产生于用数学解释自然这一信念”。

——John Herman Randall

毕达哥拉斯学派认为“数是万物之本原”，这种断语听来近乎荒谬，但很多有成就的科学大师的确是从“科学的本质是数学”这一信念出发而做出成绩来的。伽俐略与笛卡尔都相信自然界是用数学设计的。伽俐略曾说：“宇宙这本书是用数学语言写出的，没有它们，人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着”。很多人都知道伽俐略在实验科学方面的建树，但伽俐略对文明史的主要贡献却是他用数学思维方法对科学方法论的变革。他认为科学工作中的演绎数学部分所起的作用比实验部分所起的作用大。刻卜勒梦寐以求的就是将行星运动规律变成数学，他坚信行星运动可以还原成数学。事实证明他的信念是正确的。刻卜勒行星运动三定律正是大自然对他这种数学信念的回报。牛顿也相信任何自然现象都能变成数学。最初他并没有企图创建物理学的体系，而只是想用数学自由地处理苹果落地（自由落体运动）这类现象。他发觉传统的数学工具用来研究自由落体运动不够用，但他没有象某些庸人那样埋怨数学不能描述复杂的事物，埋怨数学预测不准。他出于“科学的本质是数学”这一信念，发展出

一套全新的数学理论——微积分，来研究自由落体运动，一旦小问题可以自由地用数学来处理，经典物理学体系就脱颖而出了。

爱因斯坦相信“世界无非是一堆微分方程”。他的成就当然与他对数学的嗜好直接有关。

可以说，很多新的科学是伴随着那些看来不能变成数学的事物变成数学而出现的，新的科学的创建与数学的发展是同步的。

很多民族的思想史都经过了从崇尚自然语言到崇尚哲学语言，而最后到崇尚数学语言的阶段。近代科学史就是一大批嗜好数学的人物发狂地把各种研究对象变成数学的历史。他们百折不挠，冥思苦想，梦寐以求的就是将各种事物变成数学化的系统。这个历史从十六世纪以来继续了数百年，其势头历久不衰。

数学的触角近年伸入生物学，最复杂的生物分类学如今也被“数量分类学”所占据。物种分类这种纯定性分析的学科中，目前光是测度种间抽象距离的数学公式就有数十个。

心理学这个过去最敌视数学的领域，也开始大量使用数学，专门用于心理学的数学教科书亦逐渐增多。

但是在传统的社会科学领域中，数学取得成就最大的是在经济学领域。1969年诺贝尔经济学奖金的设立承认了这一事实。经济学是社会科学中最早成功地实现数学化的学科。

经济学数学化的重要标志，是它不限于仅仅应用现有的数学工具，而是与数学融为一体，同步发展。例如线性规划的出现谁也说不清这是数学的突破还是经济学的突破。点集拓扑学中的效用函数存在定理既可以说是纯数学定理，也可以说是经济学定理。

现代数理经济学不但是一门应用数学的经济科学，而且很有点“数学物理方法”的味道，在其学术著作中，人们几乎分不清它究竟是数学还是经济学。

很多数学家惊讶地发现，极其抽象的拓扑学最有用的地方竟是经济学领域。正如冯·诺依曼所料，经济现象最复杂，它要用的数学理论也最高深，因为越是抽象的数学工具越适于分析实际上十分复杂的事物。正如初等代数不能用来描述自由落体运动，而必须要用微积分一样。一般数学分析用来描述经济现象也不够，而需要拓扑学这类抽象的工具。

这也证明了数学家的预言："从长远观点看，越是抽象的数学理论，其应用前景越是广阔”。

微积分刚出现时，当时的学术界将其斥为异端邪说，直到牛顿同时代的人几乎全部不在人世时，微积分才被新起的一代人普遍接受。

而数理经济学的创始人瓦尔拉斯等人在世时，大多数经济学家都不能接受这些理论，并且对它诸多责难，例如：

“经济学涉及复杂的人的心理和行为，不能变成数学”；

“经济现象太复杂，现有数学不足以用来分析经济问题”；

“经济变量不具备连续性，经济问题不确定性大，用数学分析只能是简化的数学游戏，不可能准确预测”；

“经济学主要是定性分析，定量分析至少不能代替定性分析”。

早在二十多年前，伟大的数学家，现代计算机之父、数理经济学家冯·诺依曼就有力地批驳了以上观点。

在牛顿那个时代，把苹果落地问题变成数学的困难比我们今天将需求量和价格的关系变成数学模型的困难要大得多。在热力学的史前时期，人们把冷热概念变成可测度的温

度比我们今天测度商品的效用（使用价值）也要困难得多。冯·诺依曼认为，类似反对在经济中应用数学的论调在物理学的早期就出现过，也早就被历史所驳倒。他认为关键并不在于研究的对象过于复杂不便于应用数学，而在于这种对数学的被动态度。正因为研究对象复杂才需要我们研究出应用数学的新手段。如果现有的数学不足以描述复杂的研究对象，则应该发展出新的数学理论来，这个过程中就会有新的科学产生。冯·诺依曼强调牛顿研究自由落体运动的例子，如果没有牛顿企图将自然现象变成数学的不懈努力，就不会有微积分这种数学上的突破，也不会有物理科学的创立。

说经济变量不具备连续性，经济现象不确定性太大，这正说明经济学应强调运用离散数学和概率论等数学工具，例如随机差分方程就是在经济中最有用的数学工具之一。

认为数理经济学只搞定量分析忽视定性分析的人，对数学显然缺乏了解。数学正是定性分析的最有力的工具。真正科学的定性分析，必须依靠数学语言。力学、电子学、高能物理学、空气动力学、生物学等学科中都有很多纯定性分析的研究，这些定性分析正是用数学方法进行的。数理经济学是经济学的定性分析学科，而经济计量学才是定量分析的学科。数理经济学用定性分析提供基础理论，而经济计量学根据这些定性分析去定量地计算各种参数。经济现象非常复杂，没有数学工具，进行定性分析就没有一个严格的逻辑推理手段，所以没有数学的定性经济分析，不但不严格，而且根本无法清晰地处理复杂的研究对象。所以数学对于经济学的意义主要在于定性分析而其次才是定量分析。至今数理经济用定性分析得出的有关经济机制、价格制度功能的一整套理论远比具体的经济计量模型对现代经济社会的影响大。

任何研究对象都能用无穷多种定性的系统去处理，例如，在伽俐略之前，研究物理现象也有一些定性分析的系统，亚里士多德学派用流动性、刚性、自然位置、要素等概念定性描述自然现象。而伽俐略却创造出一套全新的定性概念来革新传统的定性系统，如速度、加速度、力、质量等等。这在当时可说是对经典的大逆不道了，但这些定性概念全可以定量测度，因而可以用数学公式联系起来。特别是微积分的创立，可以把一些看来不能写成不变的规律的复杂事物变成了封闭单值的数学公式系统，所谓“封闭单值”就是“放之四海而皆准”。历史证明这种能定量化的定性系统才是不朽的，而不能定量化的各种定性系统终究会随历史长河之流逝而黯然失色。

在瓦尔拉斯那个时代，应用高等数学的经济学叫数理经济学，以示与自然语言进行分析的经济学之区别。但在我们这个时代，经济学几乎已全部数学化，国际经济学术界中，完全用自然语言讨论经济问题的文献已经很少了。当代没有不应用数学的物理学，从这个意义上我们可以说，今天不应用数学的“经济学”也算不上经济学了。今天的经济学就是上个世纪人们称为数理经济学的东西。广义的数理经济学就是“高级经济分析”。它与初级经济分析和中级经济分析的区别在于更系统地运用高等数学来阐述经济理论。而初级、中级经济分析主要是用几何图形浅显（但不严格）地解释这些用高等数学推出的理论。

现代数理经济学主要是指狭义数理经济学，它用规范化的方法研究瓦尔拉斯创立的一般均衡理论，使用的数学工具主要是集合论、群论、拓扑学。它与新古典主义边际分析主要使用微积分方法不同，其学术文献完全是公理化的。与古

典数理经济学的实证分析不同，现代数理经济学从一套公设、假定、定义出发，导出若干引理、定理和系。

所谓一般均衡就是全社会的综合最优经济效果，其中分为消费者均衡和生产者均衡及协调二者的 Pareto 最优分配。消费者均衡就是消费者在预算约束下的最优经济效果问题，测度这种消费者经济效果的综合指标就是效用函数。这种综合经济效果指标是否存在，如何测度，这正是数理经济学的效用函数存在定理和需求函数理论要解决的问题。

生产者均衡就是生产者最优经济效果问题，即在技术条件和资源约束下怎样达到最大利润的问题。

一般均衡研究怎样找到一组最优价格，使生产者最优经济效果与消费者最优经济效果自动协调。这是“核存在定理”和不动点定理要解决的问题。

数理经济学是主要进行定性分析的理论经济学，它研究最优经济效果、利益协调和最优价格的确定这些经济学基本理论问题，为经济计量学、管理科学、经济控制论提供模型框架、结构和基础理论，它实在是经济学的基础之基础。如果对这一经济学的基础理论学科不重视，而只注重经济计量学和运筹学等方法学科，那就容易犯生吞活剥的毛病，不能很好地结合我国的具体情况，灵活地运用他人的具体方法。尤其是忽视了掌握先进思维方法的重要性，在理论方面就上不去，不能利用已有的大量文献成果。例如将误认供给函数为需求函数，不能正确设计计量经济模型的结构，不善于用经济理论检验和解释估计出的模型和参数；不能精细地区别均衡价格、影子价格、最优价格与生产价格的概念差别。

数理经济学的先驱是法国学者A. A. Cournot，他于1838年发表《以数学原理研究财富的理论》，提出了需求函数理

论，把人们熟视无睹的商品需求量与价格之间的关系写成了函数形式。

H. H. Gossen 和W. S. Jevons 用函数理论研究消费者经济效果的综合指标即效用函数，并将导数概念引入经济学，这就是著名的边际概念。这在经济学史上有划时代的意义，它使经济学使用的数学工具从初等数学进入到高等数学，使经济学研究的对象从常量（以平均成本、平均利润、不变使用价值等概念为代表）进入变量（边际成本，边际收益、边际效用等）。Gossen 用条件极值法研究消费者的最优经济效果问题，得出了著名的“Gossen 第二法则”，又称边际效用均等法则。

瓦尔拉斯在前人研究的基础上提出了影响经济学界达一世纪之久的一般均衡理论。他证明了瓦尔拉斯定理，但对一般均衡的大多数理论问题，他并没有解决。

V. F. D. Pareto 和 F. Y. Edgeworth 批判了效用函数的基数论，创立了效用函数的序数论，进一步将消费者经济效果问题的研究推向前进，并提出了著名的“Pareto 最优分配律”。J. R. Hicks 将 Pareto 提出的序数论和“无差异曲线”进一步阐述，使经济学界广泛接受。

现代最著名的数理经济学家应首推 Von Neuman，他开创了用集合论、群论、拓扑学研究所谓规范经济理论的新时代。很多数理经济学的重要定理都是由他证明或提出的。

现代在数理经济学方面作出杰出贡献的还有：

日本数学家角谷静夫（1943年证明一般均衡存在的不动点定理）；

K. J. Arrow（1951 年证明效用函数的存在定理）；

G. Debreu（1954 年证明效用函数的存在定理）和

H. Scarf（二人 1963 年证明竞争均衡与经济核关系定理）；

T. C. Koopmas（证明了均衡与最优经济效果之间的关系以及最优经济效果问题与最优价格的对偶）。

上述学者大多是在狭义数理经济学方面作出杰出贡献的人物，在广义数理经济学方面做出杰出贡献的人物如今已达到多不胜数的地步，在此不一一列举。

数理经济学所研究的根本问题与我们所关心的问题，内容实质上是相同的，但因语义上的歧异，造成理解的困难，加上我们有些读者对数学语言陌生，感到数理经济学难以理解，也有个别人并没有吃透数理经济学反而随意批判它（其实没有批到点子上）。希望此书能使读者真正理解数理经济学的内容，在吃透它的基础上进一步发展它。因此本书对数理经济学的一些基本概念结合我们的经济学术语作了一些解释，例如再生产理论在数理经济学的辞典中就是投入产出等均衡概念；消费者综合经济效果指标就是效用函数概念；消费者最优经济效果和生产者最优经济效果的协调就是一般均衡概念；最优积累率、最优轻重工业比例问题就是最优经济增长概念；……。

这些我们经常讨论的重大经济问题，数理经济学中都有十分成熟的理论和定理、定律。千万学者在这些问题上已积累了多不胜数的文献，如果我们能系统地继承这些成果，我们的经济学界可以避免重复别人的工作，少走弯路。

重视文献积累与综述，这不但是一种学术道德和学风问题，而且也是建立文化秩序的需要。研究任何经济问题应该综述有关的重要文献。例如研究最优积累率问题，就要叙述谁最早提出这个问题（例如 1928 年 F. P. Ramsey 用变分法导出最优积累率公式）；后来谁又发展了它（例如R. Dorfman

用控制理论研究最优积累率以及其它众多文献)；这一理论目前发展到什么水平；还有什么问题没解决等等，并且要列出详细的文献目录。综述文献的水平，文献目录的选择都反映了作者的学风和学术水平。每人都这样做，学术界才能有效地交流情报，积累成果，使大家在学术上有共同语言，以便分工协作，避免小而全，不走弯路，不搞重复劳动。这种分工协作的文献积累达到一定水平才会产生重大的理论突破和应用价值。

此书通过系统地介绍广义数理经济学基础理论，以使读者具备读一般现代经济文献的能力。

# 第一章 经济规律的定性定量描述

## §1.1 经济规律的定性分析

要具备用数学来分析经济现象和规律的能力，首先要训练用数学语言思考经济问题的能力。最初，我们要有意识地培养自己将实际经济现象译成数学语言的能力，并且努力将学到的数学概念和理论转化为经济原形，理解其经济意义。当我们熟悉了数学语言，并且能轻易进行数学语言和经济问题之间的“翻译”，进一步的努力可以使我们不经过“翻译”，而直接用数学头脑思考经济问题。

我们碰到一个经济问题，可以将其分解成很多因素，这些因素又可分为两大类，一类是原因因素，我们称其为自变量，或叫外生变量，解释变量。另一类是结果因素，我们称其为因变量，或叫内生变量、被解释变量。然后我们研究因变量与自变量的关系，这种关系就是函数。如果研究因变量变化与自变量变化的关系，这种关系就是导函数。导数在经济分析中叫边际分析，例如需求量对价格的导数叫边际需求量，效用对消费量的导数叫边际效用，总费用对产量的导数叫边际费用等等。

对各种经济关系我们虽然采用了函数这一数学概念，但我们可以利用导数特性与函数特性的关系来定性分析这种关系，而不一定要定量地给出具体的函数关系。

例如，价格上升，对商品的需求量会下降，我们如果将需求量 $x$ 与价格 $p$ 的关系写成定性的抽象函数

$$x = f(p)$$

则价格上升，需求量下降这种价格与需求之间关系的特性可定性地写为

$$\frac{dx}{dp} < 0$$

因为 $x$ 随 $p$ 上升而下降意味着 $x$ 对 $p$ 的一阶导数小于 0 （图 1.1)，即 $p-x$ 坐标系中曲线 $x = f(p)$ 的切线斜率小于 0 时，曲线向右下方倾斜。

如果需求随价格上升而下降得越来越慢，则可定性地记为

$$\frac{d^2x}{dp^2} > 0$$

在 $p-x$ 坐标系中，曲线 $x = f(p)$ 向下凸，$x$ 对 $p$ 的二阶导数大于 0 （图1.2)，这时随着 $p$ 的增加 $x$ 增加得越来越少。

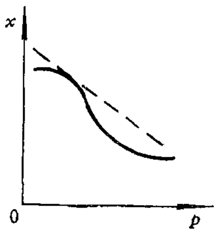



图 1.1

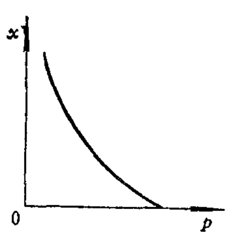



图 1.2

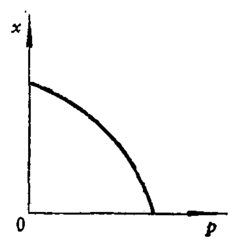



图 1.3

如果需求随价格上升而下降得越来越快，则可定性地记为

$$\frac{d^2x}{dp^2} < 0$$

在 $p-x$ 坐标系中，曲线 $x = f(p)$ 向下凹，$x$ 对 $p$ 的二阶导数小于 0 （图 1.3)，这时 $x$ 随 $p$ 的增加下降得越来越快。

所有这些定性分析并不一定要知道价格上升 1 元，需求下降多少的具体数字，也不一定要写出函数的具体形式，而可以利用导数特性与函数特性之间的关系进行分析。

经济学中用数学进行这种定性分析与物理学中的定性分析之重大区别是，反映经济规律的数学模型结构形式更为复杂和多样化。参数起着特殊重要的作用，并且只能用经济计量学做包含随机误差的模型，而很难搞出确定型模型。

比如欧姆定律可写为

$$U = IR$$

其中$U$为电压，$I$为电流，$R$为电阻。这个公式中有三个变量，但是没有一个参数，更没有随机误差项。所谓参数意为参与起作用的数，它表面上是个常数，实际上可以在不同情况下取不同值，参数值一改变，就使因变量与自变量之间的关系完全改观。参数介于常数与变量之间，它可以将很多变量的问题化为较少变量的问题来研究。

我们知道价格上升会使需求量下降，而收入上升会使需求量上升。为了用数学描述这种规律，我们马上会想到算术中的正比、反比关系，这可以写为

$$x = \frac{M}{p}$$

其中$x$为需求量，$M$为收入，$p$为价格。上式意味着需求量正比于收入而反比于价格。但是此式对需求规律的适应性即应用的广泛性和灵活性极差。因为它只适合收入增加 1 元，需求增加$\frac{1}{p}$单位；价格增加 1 元，需求减少$\frac{M}{p^2}$单位的情况。实际上一种商品在不同地区、不同时候的需求规律千差万别，不可能都是这种唯一的规律。为了使需求模型具有更

广泛的适应性，我们可以将模型加入参数。在物理学中牛顿定律$F=ma$中的加速度参数$a$，在地球表面它约等于0.98，而在其它星球上$a$可能取其它值。参数$a$一变，力$F$与质量$m$的关系也就变了。类似地，在前述需求函数中我们可以加入参数$k$，于是需求函数变成

$$x=k\frac{M}{p}$$

这时$\frac{\partial x}{\partial M}=\frac{k}{p}$，$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{-kM}{p^2}$。随着$k$的变化，增加1元收入，增加的需求量可多可少；增加1元价格，减少的需求量也可多可少。

增加参数可以使模型的适应性更广泛，例如我们可以将需求规律写成

$$x=A-\beta p+\alpha M,\quad A,\ \alpha,\ \beta>0$$

其中$A$，$\alpha$，$\beta$都是待定参数，$M$为收入，$p$为价格，$x$为需求量。

但是即使有了较多参数，一种形式的需求函数对变化多端的需求规律的适应性仍很差。对于$x=k\frac{M}{p}$而言，$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}=2\frac{kM}{p^3}>0$，即需求量随价格上升而下降得越来越慢。事实上有些商品价格上升后，需求量下降得越来越快，所以对于这类规律我们光考虑加入参数仍不够，而有必要改变需求函数的结构，例如采用如下的模型

$$x=A+aM+bp^2+cp,\quad a>0,\ b,\ c<0$$

则$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}=2b<0$，即需求量随价格上升而下降得越来越快。一般物理规律大多有固定的公式，但对于经济规律来说，不

但变量多、参数多，而且从经验来判断一种经济规律的可能的函数形式也很多。

例如需求规律非常复杂，我们必须设计很多不同形式的函数形式，然后用经济计量学利用统计数据估计参数，并用统计推断来判断哪类函数形式与实际数据拟合得最好，最后还要根据经济理论来确定选择哪种模型来描述需求规律。

例如可能的需求规律就有如下多种函数形式：

$$x = A + \alpha M - \beta p$$

$$x = AM^{\alpha} p^{-\beta}$$

$$x = \alpha \frac{M}{p} + A$$

$$x = \alpha M - \frac{\beta}{p} + A$$

……………………

其中$A$，$\alpha$，$\beta$都为待定参数。

下面我们用经济中的一些增长函数来说明利用数学方法对经济规律进行定性分析的方法。

## §1.2 增长函数

人口增长规律可以用增长函数来描述。假设初始时刻总人口数为$N_0$，平均每人每年生$r$个孩子，则在没有死亡的情况下，第一年末总人数为

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0 + rN_0 \\ &= N_0(1+r) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

第二年末人数为

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 + rN_1 \\ &= N_1(1+r) \\ &= N_0(1+r)^2 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

依此类推，第 $t$ 年末的人数为

$$N_t=N_0(1+r)^t \tag{1.2.3}$$

将式（1.2.3）对 $t$ 求导数，得到

$$\frac{dN_t}{dt}=N_0[\ln(1+r)](1+r)^t \tag{1.2.4}$$

由于 $1+r>1$，所以 $\ln(1+r)>0$，所以

$$\frac{dN_t}{dt}>0$$

即曲线

$$N_t=N_0(1+r)^t$$

为渐升的。将式（1.2.4）再求一次导数，得到

$$\frac{d^2N_t}{dt^2}=N_0[\ln(1+r)]^2(1+r)^t>0 \tag{1.2.5}$$

根据函数二阶导数的特性易知，函数 $N_t=N_0(1+r)^t$ 是一条向上凹的曲线。当然，如果考虑到死亡率，情况又会有所不同。

经济中有很多各种因素互为因果的现象，造成所谓良性循环（或恶性循环）。良性循环往往表现为因变量对自变量的二阶导数大于0。例如某种商品的市场扩大时，由于生产批量增加，由于操作技术的熟练，专业化水平的提高，使经济效率提高，经济效率提高后，又可以在不减少单位产品利润的条件下降低价格（因为效率提高后成本降低了），因而反过来使市场进一步扩大，这反过来又使效率进一步提高，这就是一种良性循环。我们设 $x$ 为经济效率，$y$ 为销售市场的大小（用销售量表示），则经济效率正比于市场的大小，可记为

$$x=k_1y \tag{1.2.6}$$

而销售量 $y$ 对时间 $t$ 的一阶导数，即市场的变化率正比于效

率 $x$：

$$\frac{dy}{dt}=k_2x=k_2k_1y \qquad (1.2.7)$$

其中$k_1$，$k_2$都是比例参数，令

$$K=k_1k_2$$

则式（1.2.7）可写为

$$\frac{dy}{dt}=Ky \qquad (1.2.7')$$

解此微分方程，得到通解

$$y=Ae^{Kt} \qquad (1.2.8)$$

其中$A$为积分常数。指数函数式（1.2.8）就是描述良性循环时销售额增长的函数，其一阶、二阶导数都大于0，$A$为初始时刻之销售量（图 1.4）。

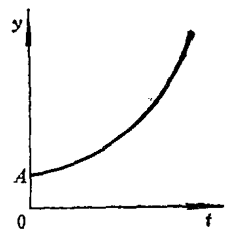


图 1.4

银行集资能力越强，则为扩大生产提供的资金越多，而资金越多，生产规模越大，效率越高，又反过来使银行资金来源增加，集资能力提高；

生产效率越高，可以使人们单位劳动时间获得的收入上升，而单位时间的收入越高，则人们越愿意在单位时间内贡献出更多的智力和体力，因而反过来使生产效率提高。

以上这些都是良性循环的例子，很多新兴工业、新企业、新学科、新技术都可以在一定范围内用式（1.2.8）近似地描述其增长过程。近几个世纪以来科学家的人数、经济学家的人数，情报、文献数量，杂志种数等等，都可以用这类增长函数来描绘。但我们也要注意到式（1.2.8）表现了事物内在的规律，而事物的发展又要受到外界条件的限制，生物

的繁殖要受食物的限制，企业的大小受到空间和管理能力的限制，事物发展不可能永远按式（1.2.8）无限地增殖。

## §1.3 复利函数

利息是投资的“机会成本”，它反映了如果不在此处投资，银行将其投向其它地方，至少可获得的收益率。所以我们必须用利息率来衡量一项投资是否合理。技术先进的投资往往一次性投资大，因而各年积累的利息多，这很可能抵消先进技术经常性成本低的好处。所以在进行项目评价时，必须把各种方案的机会成本即利息考虑进去。以往有些银行算利息采用单利计息法，即逐月（或逐年）将利息加总。实际上你如果存了 100 元，年息 5 厘，每年你取出一次，然后再存进去，第一年取出 105 元，存入，第二年可取出 $105+105\times0.05=105\times(1+0.05)=110.25$，第三年可取出 $110.25\times(1+0.05)=115.7625$。如果不每年取出，按单利计息，三年共可得利息 $5\times3=15$ 元。而每年取出重新存入，却可得利息 15.7625 元。后一种计息方法就是复利法。世界各国目前都采用复利法计息。通俗一点说，复利法就是利滚利，即所谓“驴打滚”。显然复利法更符合实际经济的运营情形。

广而言之，任何资金流，例如投资、费用、收益、利润等等用复利法计息，就是考虑了资金的“时间价值”。例如目前收入或支出 100 元钱，比 10 年后支出或收入 100 元钱的价值更大，因为 100 元钱 10 年内按 5% 利率计算的复利为 $(1+0.05)^{10}100-100=62.89$ 元，所以目前支出或收入 100 元相当于 10 年后支出或收入162.89 元，这多出的62.89 元就可以视为 100 元钱 10 年的时间价值。

因此任何动态经济模型都要利用复利计算公式计算资金流的时间价值。所有动态经济模型的目标函数通常总要把各年的净资金流化为头年值，即贴现，以便使最优经济效果充分考虑时间价值问题。

设某厂初始年向银行借款$A$元，年利率为$r$，则第一年之本利和为

$$x_1 = A + Ar = A(1+r)$$

第二年之本利和为

$$x_2 = x_1 + rx_1 = x_1(1+r) = A(1+r)^2$$

$$\cdots\cdots$$

第$t$年之本利和为

$$x_t = A(1+r)^t \tag{1.3.1}$$

此式可将现值$A$化为未来值$x_t$，叫未来值公式，$(1+r)^t$叫未来值因子，从中可导出

$$A = x_t(1+r)^{-t} \tag{1.3.2}$$

此式可将资金未来$t$年值$x_t$化为现值$A$，所以叫贴现公式，$(1+r)^{-t}$叫贴现因子。一般，利率$r$就是贴现率。

若不按年计息，而按月计息，则每月利率为$\frac{r}{12}$，每年计利次数为12次，$t$年计利次数为$12t$，则式（1.3.2）可改写为

$$x_t = A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}$$

若每年计利$n$次，则一般地

$$x_t = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

我们可以将指数$nt$写成$\frac{n}{r}rt$，则上式可改写成

$$x_t = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}rt}$$

令 $m=\frac{n}{r}$，则$\frac{1}{m}=\frac{r}{n}$，于是上式可写为

$$x_t = A\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

令$m\to\infty$，求$x_t$的极限，则有

$$\lim_{m\to\infty} x_t = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mrt}$$

$$= A\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}^{rt}$$

$$= Ae^{rt}$$

所以我们取

$$x_t = Ae^{rt} \tag{1.3.3}$$

为连续复利函数。利用此式可以将现值$A$化为按连续复利计息的$t$年末来值，所以此式叫连续复利未来值公式，$e^{rt}$叫连续复利未来值因子。从上式可导出

$$A = x_t e^{-rt} \tag{1.3.4}$$

此式能将未来$t$年资金值$x_t$化为现值$A$，所以叫连续复利贴现公式，$e^{-rt}$叫连续复利贴现因子。最优经济效果动态分析的目标函数中，一般都用连续复利贴现因子将各个时刻的资金流化为现值。连续复利函数反映了实际经济活动的连续过程，如树木的连续生长，钢铁厂不间断的生产过程，商业周转的连续性特点等等。显然，离散复利公式（1.3.1）和

(1.3.2) 比连续复利公式受时间的影响小，即

$$e^{rt}>(1+r)^t$$
$$e^{-rt}<(1+r)^{-t}$$

利用 (1.3.1) 式可将现值$A$化为当期值及头年末，二年末，三年末，……，$(t-2)$年末，$(t-1)$年末的未来值 $x_0$，$x_1$……$x_{t-1}$，分别为：

$$x_0=A(1+r)^0=A$$
$$x_1=A(1+r)^1=A(1+r)$$
$$x_2=A(1+r)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{t-2}=A(1+r)^{t-2}$$
$$x_{t-1}=A(1+r)^{t-1}$$

反过来，我们如果在每年有一等量资金流（收入或支出）$A$发生，则头年末的$A$元化为$t$年的未来值就是$x_{t-1}=A(1+r)^{t-1}$，第二年末的$A$元化为$t$年的未来值就是$x_{t-2}=A(1+r)^{t-2}$，……第$(t-2)$年末的$A$元化为$t$年的未来值就是$x_2=A(1+r)^2$，$(t-1)$年末的$A$元化为$t$年的未来值就是$x_1=A(1+r)$，而$t$年末的$A$元化为当期值就是$x_0=A$元。

如果我们要将每年发生一等量资金流$A$元化为$t$年末的未来值的总和，则可以将$x_{t-1}$，$x_{t-2}$，…，$x_2$，$x_1$，$x_0$加总求和，这是一个等比级数求和问题，其公比为$(1+r)$。设这一等比级数和为$F$，则

$$\begin{aligned}F&=x_{t-1}+x_{t-2}+\cdots+x_2+x_1+x_0\\&=A[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\cdots\\&\quad+(1+r)^2+(1+r)+1]\end{aligned}$$

将上式等号两边同乘以（1＋r），则

$$(1+r)F=A[(1+r)^t+(1+r)^{t-1}+\cdots+(1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)]$$

用此式减去$F$，可得

$$(1+r-1)F=A[(1+r)^t-1]$$

$$F=\frac{1}{r}[(1+r)^t-1]A \qquad (1.3.5)$$

此式为等量资金流未来值公式，从中可导出

$$A=\frac{r}{(1+r)^t-1}F \qquad (1.3.6)$$

此式可用来将未来值$F$化为逐年等量资金流$A$。

如果将式（1.3.5）中的$F$全部贴现，则有等量资金流现值公式

$$P=F(1+r)^{-t}=\frac{(1+r)^t-1}{r(1+r)^t}A \qquad (1.3.7)$$

反过来，若要求每年支出（或收入）等量资金$A$，且使其总的现值为$P$，则每年应付金额为

$$A=\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}P \qquad (1.3.8)$$

其中$\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$叫资本还原因子，人们经常用它来计算折旧费用。如果最初投资$P$元，每年提取等量收益$A$元作为折旧，$t$年折旧完毕，则每年折旧费可用式（1.3.8）计算。10年将10万元初始投资折旧完毕，每年折旧费并不是1万元，因为未折旧的资金还要累积算利息，所以若考虑到时间价值，每年的折旧费必须大于1万元，才能在10年将10万元初始投资折旧完毕。

对于连续复利的情形，若每一时刻发生一等量资金流$A$，

则在 0－$T$时域内，总的资金流化为未来$T$年价值为

$$F=\int_0^T Ae^{rt}dt=\frac{A}{r}(e^{rT}-1) \qquad (1.3.9)$$

若总的资金流化为头年值，我们有等量资金流现值公式

$$P=\int_0^T Ae^{-rt}dt=\frac{A}{r}(1-e^{-rT}) \qquad (1.3.10)$$

从上式解出$A$，则得到连续复利资本还原公式：

$$A=\frac{r}{1-e^{-rT}}P \qquad (1.3.11)$$

其中 $\frac{r}{1-e^{-rT}}$ 就是连续复利资本还原因子。

若资金流每年等量间断发生$A$元，一旦发生仍按连续复利计息，则初始年末发生的$A$元化为未来$T$年的价值为$Ae^{r(T-1)}$；第二年末发生的$A$元化为$T$年未来值为$Ae^{r(T-2)}$；……；（$T-1$）年末发生的$A$元化为$T$年的未来值为$Ae^{r[T-(T-1)]}=Ae^r$；$T$年末的$A$元化为当年值为$Ae^{r(T-T)}=A$。

将所有这些未来值求和，则得到每年发生一等量资金流$A$元化成未来值后的总和：

$$F=A[e^{r(T-1)}+e^{r(T-2)}+\cdots+e^r+1]$$

等号两边同乘以$e^r$，则

$$e^rF=A[e^{rT}+e^{r(T-1)}+\cdots+e^{2r}+e^r]$$

用上式减去$F$，则

$$(e^r-1)F=A(e^{rT}-1)$$

$$F=\frac{e^{rT}-1}{e^r-1}A \qquad (1.3.12)$$

将未来值总和$F$化为现值$P$，我们有间断发生的等量资

金流 $A$ 按连续复利计算的现值公式

$$P = Fe^{-rT} = \frac{1-e^{-rT}}{e^{r}-1}A \qquad (1.3.13)$$

从上式可导出

$$A = \frac{e^{r}-1}{1-e^{-rT}}P \qquad (1.3.14)$$

其中 $\frac{e^{r}-1}{1-e^{-rT}}$ 就是间断提取等量折旧 $A$ 按 连 续 复 利计算的资本还原因子。所以，同一利率的情况下，离散资本还原因子小于上述连续复利资本还原因子，即

$$\frac{r(1+r)^{T}}{(1+r)^{T}-1} < \frac{e^{r}-1}{1-e^{-rT}}$$

如果折旧不是间断提取，而是连续提取，则资本还原因子就是式（1.3.11）中的 $\frac{r}{1-e^{-rT}}$，它比间断提取连续复利资本还原因子 $\frac{e^{r}-1}{1-e^{-rT}}$ 更大，即

$$\frac{r(1+r)^{T}}{(1+r)^{T}-1} < \frac{e^{r}-1}{1-e^{rT}} < \frac{r}{1-e^{-rT}} \qquad (1.3.15)$$

如果计算年数 $T$ 不太长，则三种还原因子的 值 差 别 不大，年数 $T$ 越长，则三者的差别越大。

如果存在通货膨胀，则当前的 100 元钱在未来 $t$ 年就不值 100 元钱了，所以通货膨胀对资金价值的影响与利息对资金价值的影响正好相反。设通货膨胀率为 $i$，则 $A$ 元现值化为 $t$ 年未来值为

$$\begin{aligned} F &= Ae^{rt}e^{-it} \\ &= Ae^{(r-i)t} \end{aligned} \qquad (1.3.16)$$

而 $F$ 元未来值化为现值为

$$A = Fe^{(i-r)t} \qquad (1.3.17)$$

如果已知目前投资$P$元，$T$年后收入$F$元，则我们可以用复利法算出一个内部利率，它反映了此项投资的实际赢利能力，将其与银行贷款利率比较就可以判断此项投资的还本付息能力。设内部利率为$r$，则现值$P$元按连续复利化为$T$年未来值后为

$$F=Pe^{rT}$$

对等号两边求对数，可解出$r$：

$$\ln F=\ln P+rT$$

$$r=\frac{\ln F-\ln P}{T}=\frac{\ln\frac{F}{P}}{T} \qquad (1.3.18)$$

如果内部利率$r$高于银行贷款利率，则此项投资有利可图，若内部利率低于银行利率，则此项投资无利可图。

从式（1.3.18）还可导出

$$T=\frac{\ln\frac{F}{P}}{r} \qquad (1.3.19)$$

利用此式可以在已知利率$r$的情况下计算返本期（回收期）$T$。

如果各年都有资金流发生，那么求解内部利率或求解返本期往往要碰到求解超越方程的问题。求解这类问题经常运用牛顿数值解法。我们用一个例题说明这种解法。

**例** 设某企业建厂时从银行一次借入120万元资金作为投资，每年按离散复利计息，利率$r=0.1$，投入生产后，每年又向银行借入10万元流动资金，仍按离散复利计息；工厂每一时刻有一连续净收入流量50万元，由于生产是连续进行的，将净收入资金不断投入，连续产生利润，利润率为

0.2，问此企业何年能将借款本息还清？

投资的 120 万元是现值，若 $T$ 年企业能还清借款的本息，则这 120 万元到 $T$ 年的本息总额为

$$120(1+0.1)^T$$

每年借入 10 万元，利用等量资金流的未来值因子，我们可以将每年的等量资金流 10 万元化为 $T$ 年的未来值：

$$\frac{10}{0.1}\left[(1+0.1)^T-1\right]$$

利用等量资金流连续复利未来值因子，我们可以把连续产生的净收入 50 万元化为未来 $T$ 年值：

$$\frac{50}{0.2}(e^{0.2T}-1)$$

收支相抵的条件为

$$120(1+0.1)^T+\frac{10}{0.1}\left[(1+0.1)^T-1\right]=\frac{50}{0.2}(e^{0.2T}-1)$$

整理后可得

$$22\times1.1^T-25e^{0.2T}+15=0$$

令上式等号左边的式子为 $f(T)$，我们可以用牛顿数值解法求解上述超越方程。首先我们对 $T$ 任意赋值，找到两个使 $f(T)$ 符号相反的 $T$ 值，即

$$f(2)=4.32438$$
$$f(3)=-1.27097$$

然后将 $f$ 对 $T$ 分别求一阶和二阶导数，得

$$f'(T)=2.0968\times1.1^T-5e^{0.2T}$$
$$f''(T)=0.1998\times1.1^T-e^{0.2T}$$

由于 $$f''(2)=-1.25007<0$$
$$f''(3)=-1.556185<0$$

即 $f''(2)$，$f''(3)$ 的符号与 $f(3)$ 相同，所以我们从 $T_0=$

3 开始，用牛顿迭代公式计算。牛顿公式为

$$T_{n+1}=T_n-\frac{f(T_n)}{f'(T_n)}$$

所以

$$T_1=T_0-\frac{f(T_0)}{f'(T_0)}=3-\frac{f(3)}{f'(3)}=2.79888930$$

$$T_2=T_1-\frac{f(T_1)}{f'(T_1)}=2.79373087$$

$$T_3=T_2-\frac{f(T_2)}{f'(T_2)}=2.79372754$$

若保留 4 位小数，则$T_2$与$T_3$没有差别，所以迭代计算在精确到 4 位小数时可以结束。$T=2.7937$ 年就是原超越方程的近似解。即这个企业在 2 年 9 个半月时将还清借款本息。

## §1.4 Gompertz 增长曲线

很多经济现象的变化与时间的关系表现为如下规律：某种经济量（如猪的体重，耐用商品人均拥有量，一棵树的体积等等）有一个最大极限值。例如猪的体重不会超过 1500 斤，汽车的人均拥有量不会超过 2 辆等等。这些经济变量随时间流逝开始增长得越来越快，后来增长得越来越慢，例如汽车、电冰箱的人均拥有量最初增长得越来越快，但普及率较高后，人均拥有量增长得就会越来越慢。这类经济现象用数学语言来说，就是经济变量与时间 $t$ 的函数关系存在水平的渐近线，函数在第一象限有拐点。在拐点左端，函数向下凸，即二阶导数大于 0，也就是自然语言的“越来越快”；在拐点的右端，函数向下凹，即二阶导数小于 0，也就是自然语言的“越来越慢”。

Gompertz 曲线用来描述这类经济现象比较合适。设耐

用商品累积销售量为$y$，则Gompertz曲线为

$$y=Ae^{-be^{-at}},\qquad a,\ b>0 \qquad (1.4.1)$$

当$t=0$时，$y=Ae^{-b}$，当$t\to\infty$，$y\to A$，所以$A$为$y$之上极限值。$y=A$就是式（1.4.1）之渐近线。$A$可以凭经验确定，$b$，$a$为待估计的参数，它们需用经济计量学从统计数据中算出。

对式（1.4.1）取对数得

$$\ln y=\ln A-be^{-at} \qquad (1.4.2)$$

再求导数：

$$\frac{\dot{y}}{y}=abe^{-at}$$

$$\dot{y}=abe^{-at}y \qquad (1.4.3)$$

其中$\dot{y}=\frac{dy}{dt}$。上式由于$a$，$b>0$，$y$亦非负，所以大于0，即函数单调递增。将式（1.4.3）再对时间$t$求导一次，则

$$\begin{aligned}\ddot{y}&=-a^2be^{-at}y+abe^{-at}\dot{y}\\&=-a^2be^{-at}y+(abe^{-at})^2y\end{aligned} \qquad (1.4.4)$$

令$\ddot{y}=0$，则可解出拐点坐标：

$$-a^2be^{-at}y+(abe^{-at})^2y=0$$

$$-1+be^{-at}=0$$

$$t^*=\frac{\ln b}{a} \qquad (1.4.5)$$

将$t^*$代入式（1.4.1），可求出拐点之累积销售量

$$y^*=Ae^{-be^{-\ln b}} \qquad (1.4.6)$$

将$t^*$代入式（1.4.3）可求出最大销售速率$\dot{y}^*$：

$$y^*=ade^{-\ln b}y^* \qquad (1.4.7)$$

将式（1.4.2）稍加整理可得

$$be^{-at}=\ln\frac{A}{y}$$

再求一次对数得

$$\ln b-at=\ln\left(\ln\frac{A}{y}\right) \quad (1.4.8)$$

由于$y$，$t$是已知数据，$A$可凭经验估计，于是$\ln\left(\ln\frac{A}{y}\right)$可从已知数据加工得到。令$\ln\left(\ln\frac{A}{y}\right)=X, \ln b=\alpha$，于是我们有线性方程

$$X=\alpha-at \quad (1.4.9)$$

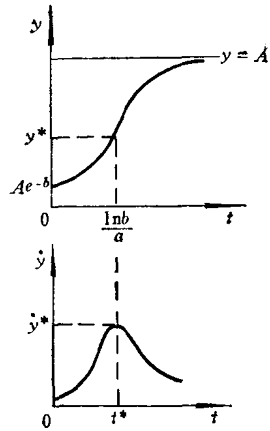



图 1.5

我们可以根据经济数据用经济计量学方法求出参数$\alpha$和$-a$，然后根据$b=\ln^{-1}\alpha$，又可算出参数$b$，于是可得到Gompertz曲线：

$$y=Ae^{-be^{-at}}$$

**例** 我们有湖北省大中城市户均拥有电视机的数据，如下表所示

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.4115 | 0.4490 | 0.5053 | 0.6829 | 0.7240 | 0.7939 |

其中$t$为季度数，以1981年1季度的$t=1$，2季度$t=2$，…，1982年1季度的$t=5$，3季度的$t=7$等等。$y$为每户平均拥有电视机数量。若时间$t\to\infty$，电视机户均拥有量的上限为$A=5$台，则式（1.4.9）中的

$$X=\ln\left(\ln\frac{A}{y}\right)=\ln\left(\ln\frac{5}{y}\right)$$

将$y$的数据代入上式则可以得到$X$的数据：

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0.9152 | 0.8797 | 0.8294 | 0.6886 | 0.6588 | 0.6099 |

用上表的两组数据$X$，$t$进行一元线性回归，可得到回归模型

$$X = 0.9783 - 0.0536\,t$$

由于$b = \ln^{-1}\alpha = \ln^{-1}0.9783 = 2.6599$，而$a = 0.0536$，所以我们有 Gompertz 曲线

$$y = 5\,e^{-2.6599e^{-0.0536t}}$$

其拐点坐标为

$$t^* = \frac{\ln b}{a} = \frac{\ln 2.6599}{0.0536} = 18.25$$

也就是 1985 年 2 季度前湖北大中城市电视机户均拥有量是加速增长的，这之后户均电视机拥有量虽然仍在增长，但增长速度越来越慢，户均购买量$\dot{y}$亦在 1985 年 2 季度达到最高，以后户均购买量将逐季减少。

如果将时间变量$t$换成户均收入$x$，则我们也可以做经济意义稍有差别的 Gompertz 曲线。这种曲线的$A$参数表示户均收入$x \to \infty$，户均拥有量的上限。

有的讨论耐用商品销售周期的文章将拐点左边的区域称为“成长期”，拐点附近的区域称为“饱和阶段”，拐点右边的区域称为“衰老期”。

## §1.5 学习曲线

学习强度提高后，学习进度会加快，但进度对学习强度的变化率随强度提高而递减。设学习强度为$x$，学习进度为$y$，则我们有学习曲线

$$y = c - ae^{-kx} \tag{1.5.1}$$

其中$a$，$c$，$k>0$，都是参数，将$y$对$x$求导数，可得

$$\frac{dy}{dx}=ake^{-kx}>0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-ak^2e^{-kx}<0$$

令$x\to\infty$，则$y\to c$，令$x=0$，则$y=c-a$。所以曲线有水平渐近线$y=c$，曲线与$y$轴的交点为$x=0$，$y=c-a$（见图1.6）。

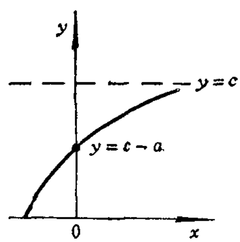


图 1.6

这种曲线可以用来描述学徒工之生产率随操作时间增加而提高的情况；还可以用来描述机器维修费用与每年使用天数之间的关系及新建工厂产出率随时间变化而逐渐达到最大能力的情况。Clark Hull在其学习理论中研究了$c=a$时，$y$与$x$的关系，这种情况下曲线经过原点。他以此为基础说明了学习进度与学习强度的相互关系。

专业化操作，会使效率不断提高，但各种工种重复操作使效率提高的程度是不一样的。为了定量测度专业化的经济效果，我们可以用所谓“经验曲线”来描述这类规律。

设生产$x$件产品所需总时间为$T$，生产件数$x$增多时，总的生产时间$T$会增多，即$\frac{dT}{dx}>0$。由于重复生产同样的产品，$T$随$x$增加的速率越来越小，即$\frac{d^2T}{dx^2}<0$。又设第一件产品所需的生产时间为$t_1$，则有经验曲线函数

$$T=t_1x^{1-k} \tag{1.5.2}$$

其中$0<k<1$。将$T$用$x$除，则得到每件产品平均所需的

生产时间 $t$，即

$$t=\frac{T}{x}=t_1x^{-k} \tag{1.5.3}$$

其一阶导数小于0，二阶导数大于0，曲线是递减且向下凸的。

生产效率反比于每件产品的平均生产时间 $t$，设生产效率为 $y$，则

$$y=\frac{1}{t}=\frac{1}{t_1}x^k \tag{1.5.4}$$

将 $y$ 对 $x$ 求导数，则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{k}{t_1}x^{k-1}>0$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{k(k-1)}{t_1}x^{k-2}<0$$

可见重复生产一种产品的次数 $x$ 越多，效率越高（$y'>0$），但边际效率是递减的。边际效率就是效率 $y$ 对 $x$ 的一阶导数 $y'$，$y'$ 随 $x$ 增加而递减意味着二阶导数 $y''<0$。$k$ 值反映了各种工种专业化提高效率的潜力的大小。$k$ 值越大，说明专业化可以使效率有较大增加，$k$ 值越小，说明专业化潜力不大。这种潜力也是种学习和训练的潜力。

例　一家玩具工厂每天总产值与其投产后的时间 $t$ 天之间的关系遵从学习曲线 $x=c-ae^{-kt}$ 所反映的规律，其中 $c=a=200$，$k=0.1$。问投产10天，100天后每天总产值为多少？

将 $t=10$，$t=100$ 分别代入 $x=200-200e^{-0.1t}$，则得

$$x=126.4241,$$

$$x=199.9909$$

所以投产10天后日产值为126.4241万元，100天后日产值

199.9909万元。

## §1.6 函数的弹性

在物理科学中，我们一般用因变量对自变量的导数来描述因变量变化对自变量变化的敏感性。但在经济分析中，这种描述往往不合适。例如猪肉需求函数为

$$x=5.3-0.21p$$

其中 $x$ 为需求量，单位为万斤，$p$ 为价格，单位为元/斤。如果我们用 $x$ 对 $p$ 的导数 $\frac{dx}{dp}=-0.21$ 来描述需求变化对价格变化的敏感性，则当测度单位变化时，就会发生问题。$\frac{dx}{dp}=-0.21$ 表示猪肉价格提高1元，需求量会降低0.21万斤。如果 $x$ 的单位不是万斤，而是吨，则需求函数变成

$$x=26.5-1.05p$$

这时 $\frac{dx}{dp}=-1.05$。我们究竟是以 $-0.21$ 表示需求变化对价格变化的敏感性还是用 $-1.05$ 表示此种敏感性呢？人们也许会说，只要强制规定统一的单位就不会出现这种问题了。对于物理学而言，研究对象较单一，我们可以规定统一的测度单位来解决此种矛盾。但在经济分析中商品千差万别，很多商品的计量单位不可能统一，但是人们又非常需要比较不同商品需求量对价格变化的敏感性。这时用导数来描述因变量和自变量之间的关系就根本不能说明问题。例如一台洗衣机与一场电影，这两类商品根本就不能统一测度单位。在单位不统一的情况下，不同商品需求量对价格的导数互相就不具备可比性。所以，为了比较不同商品之间因变量变动对自变量变动的敏感性，我们必须设计一种新的测度概念，以

使商品测度单位变化不影响敏感性的比较。

这种新的敏感性概念就是函数因变量对自变量的弹性。函数的弹性定义为因变量增长率与自变量增长率的比率，又叫做相对增长率。例如设需求函数为

$$x = f(p)$$

需求量 $x$ 的增长率为 $\frac{\Delta x}{x}$，自变量价格 $p$ 的增长率为 $\frac{\Delta p}{p}$，则 $x$ 对 $p$ 的弹性为

$$\left| \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} \right| \tag{1.6.1}$$

根据弹性的定义，它恒为一正数，令 $\Delta p$，$\Delta x \to 0$，则上式之极限为

$$\sigma = \lim_{\substack{\Delta p \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \left| \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} \right| = \left| \frac{dx}{dp} \quad \frac{p}{x} \right| = \left| \frac{d(\ln x)}{d(\ln p)} \right| \tag{1.6.2}$$

这就是函数的弹性的定义。一般而言，对于多元函数

$$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{1.6.3}$$

因变量 $y$ 对自变量 $x_i$（$i = 1,\ 2,\ 3$）的弹性为

$$\sigma_i = \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad \frac{x_i}{y} \right| \tag{1.6.4}$$

从弹性的定义易知，改变计量单位，函数的弹性不变。设用一种计量单位测得的因变量为 $y$，自变量为 $x$，现在改变计量单位，测得的因变量 $y' = \lambda y$，自变量 $x' = \mu x$。在新的计量单位下，因变量 $y'$ 对自变量 $x'$ 的弹性为

$$\sigma=\frac{dy'}{dx'}\frac{x'}{y'}=\frac{d(\lambda y)}{d(\mu x)}\frac{\mu x}{\lambda y}=\frac{\lambda}{\mu}\frac{dy}{dx}\frac{\mu x}{\lambda y}$$

$$=\frac{dy}{dx}\frac{x}{y} \tag{1.6.5}$$

这就是用原计量单位测得的弹性。

弹性的另一个特点是，两个函数的积的弹性等于两个函数弹性之和；而两个函数的商的弹性等于两个函数弹性的差。

设 $u$， $v$ 都是 $x$ 的函数，则 $u\cdot v$ 对 $x$ 的弹性根据定义为

$$\frac{d(uv)}{dx}\frac{x}{uv}=\left(\frac{vdu}{dx}+\frac{udv}{dx}\right)\frac{x}{uv}$$

$$=\frac{du}{dx}\frac{x}{u}+\frac{dv}{dx}\frac{x}{v} \tag{1.6.6}$$

而 $\frac{u}{v}$ 对 $x$ 的弹性为

$$\frac{d\frac{u}{v}}{dx}\frac{x}{\frac{u}{v}}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\frac{x}{\frac{u}{v}}$$

$$=\frac{du}{dx}\frac{x}{u}-\frac{dv}{dx}\frac{x}{v} \tag{1.6.7}$$

**例 1** 设有幂函数

$$y=Ax^a$$

则 $y$ 对 $x$ 的弹性为

$$\sigma=\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}=\frac{aAx^{a-1}x}{y}=\frac{aAx^{a-1}x}{Ax^a}=a$$

即幂函数的弹性就是其幂次参数 $a$ 。

**例 2** 设有指数函数

$$y=Ae^{ax}$$

则 $y$ 对 $x$ 的弹性为

元

$$\sigma = \frac{dy}{dx}\ \frac{x}{y} = \frac{aAe^{ax}x}{Ae^{ax}} = ax$$

即指数函数的弹性就是其指数 $ax$。

**例 3** 设有线性函数

$$y = a + bx$$

则 $y$ 对 $x$ 的弹性为

$$\sigma = \frac{dy}{dx}\ \frac{x}{y} = \frac{bx}{a + bx}$$

**例 4** 设有多元需求函数

$$y = Ax^{\alpha}p^{-\beta}, \qquad A,\ \alpha,\ \beta > 0$$

其中 $y$ 为需求量，$x$ 为收入，$p$ 为价格，则需求对价格的弹性为

$$\frac{\partial y}{\partial p}\ \frac{p}{y} = \frac{-\beta Ax^{\alpha}p^{-\beta-1}p}{Ax^{\alpha}p^{-\beta}} = -\beta$$

需求对收入的弹性为

$$\frac{\partial y}{\partial x}\ \frac{x}{y} = \frac{\alpha Ax^{\alpha-1}p^{-\beta}}{Ax^{\alpha}p^{-\beta}} = \alpha$$

## §1.7 洛仑兹曲线与基尼系数

意大利经济学家 Pareto 发觉各国经济和税收制度虽然不同，但收入分配却有共同的规律。如果设某人的收入为 $x$，则收入不小于 $x$ 的人数反比于 $x$，即收入水平 $x$ 越高，不低于这一收入水平的人数越少。这种规律可写为

$$N = N_0x^{-b} \tag{1.7.1}$$

其中 $N_0$ 为人口总数，$N$ 为收入不小于 $x$ 之人数，$-b$ 为 $N$ 对 $x$ 的弹性参数（见图 1.7）。

如果以收入不大于 $x$ 的人数占总人口的比重 $W$ 为横坐标，以收入不大于 $x$ 的人们之收入占总收入的比重 $V$ 为纵坐

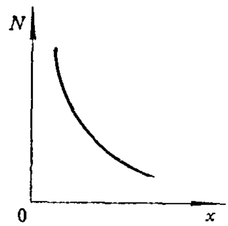



图 1.7

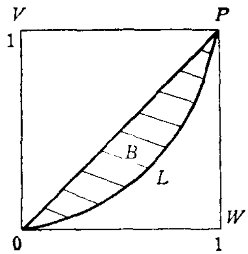



图 1.8

标，则可以在 $V$-$W$ 坐标系中将收入分配规律表为“洛仑兹曲线”。图 1.8 中有一个长 1 单位宽 1 单位的方框，因为 $W$ 与 $V$ 的最大值都是 1 。图中的对角线 $OP$ 叫绝对平等分配线，这条线上所有的点都满足 $V=W$，即收入不大于 $x$ 的人数比重 $W$ 等于其收入比重 $V$。这意味着收入分配绝对平等，所有人收入都相等。而折线 $OWP$ 为绝对不平等分配线，当 $W<1$ 时，$V$ 都等于 0，当 $W=1$ 时，$V=1$。即所有收入都集中在一个人手中，他的收入占总收入的比重为 $100\%=1$，而其他人的收入比重为 0 。实际收入分配状况总是处在这两个极端之间。例如实际收入分配状况表现为图中的洛仑兹曲线 $L$。这条曲线说明，收入水平 $x$ 越低，则收入不高于 $x$ 之人数比重往往越是高于他们的收入比重。随着这种水平 $x$ 的提高，人数比重大于收入比重的倾向越来越不明显。因为最富有的那一部份人往往占总人口的比重小，而其收入比重却相对较大。为了定量测度收入分配的不平等程度，人们设计了基尼（Gini）系数。基尼系数定义为图 1.8 中洛仑兹曲线 $L$ 与绝对平等线 $OP$ 围成的 $B$ 区域面积与三角形 $OWP$ 面积之比率，即

$$G = \frac{B\text{区域面积}}{\triangle OWP\text{面积}} \tag{1.7.2}$$

下面我们介绍基尼系数的几种计算方法。

第一种算法是逐户处理有关数据。设共有 $n$ 个家庭，第 $i$ 家的收入占总收入的比重为 $v_i$，$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$。若收入水平按从小到大排列，则洛仑兹曲线为定义在 $\left(\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}\right)$ 上之实值函数

$$L\left(\frac{i}{n}\right) = v_1 + \cdots + v_i,\quad i = 1,\ \cdots,\ n \tag{1.7.3}$$

设洛仑兹曲线 $L$ 与 $OP$ 线围成的 $B$ 区域面积为 $S_B$，要计算 $S_B$，则只要算出 $\triangle OPV$ 与 $B$ 区域的总面积，然后减去 $\triangle OPV$ 的面积就行了，因为 $\triangle OPV$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$。我们可以将这块面积分割成 4 个曲边梯形来计算，首先算曲边梯形 $OabV$ 的面积，它等于 3 个矩形的面积加上一个小曲边三角形的面积，即近似等于

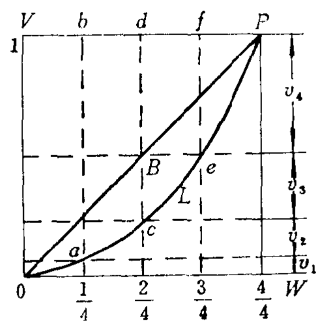



图 1.9

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_1\right) + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{4}v_3 + \frac{1}{4}v_4$$

曲边梯形 $acdb$ 的面积近似等于

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_2\right) + \frac{1}{4}v_3 + \frac{1}{4}v_4$$

曲边梯形 $cefd$ 的面积近似等于

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_3\right)+\frac{1}{4}v_4$$

最后，曲边三角形 $ePf$ 的面积近似等于

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_4\right)$$

所以洛仑兹曲线 $L$ 与 $OV$，$VP$ 线围成的区域总面积为 4 个曲边梯形的面积之和，也就等于 $\triangle OPV$ 与 $B$ 区域的面积之和，即

$$\begin{aligned} S_{\triangle OPV}+S_B= & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_1\right)+\frac{1}{4}v_2+\frac{1}{4}v_3+\frac{1}{4}v_4 \\ & +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_2\right)+\frac{1}{4}v_3+\frac{1}{4}v_4 \\ & +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_3\right)+\frac{1}{4}v_4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_4\right) \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

由于 $S_{\triangle OPV}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，所以

$$\begin{aligned} S_B= & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_3\right) \\ & +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_4\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_2\right) \\ & +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_4\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_1\right) \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_3\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}v_4\right) \\ & +\frac{1}{4}v_2+\frac{2}{4}v_3+\frac{3}{4}v_4-\frac{1}{2} \\ = & \frac{1}{4}(v_1+2v_2+3v_3+4v_4)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(v_1+v_2 \\ & +v_3+v_4)-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

由于 $v_1+v_2+v_3+v_4=1$，所以

$$S_B=\frac{1}{4}(v_1+2v_2+3v_3+4v_4)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\tag{1.7.5}$$

上述推导不难推广到不只 4 户而是有 $n$ 户的情形，这时，

$$S_B=\frac{1}{n}(v_1+2v_2+\cdots+nv_n)-\frac{1}{2}\ \frac{1}{n}-\frac{1}{2}\tag{1.7.6}$$

根据基尼系数的定义

$$G=\frac{S_B}{\frac{1}{2}}=2S_B\tag{1.7.7}$$

将式（1.7.6）代入上式，则

$$G=\frac{2}{n}(v_1+2v_2+\cdots+nv_n)-\frac{n+1}{n}\tag{1.7.8}$$

我们也可以把收入水平在一定范围内的人和家庭加在一块，把所有家庭分成几个大组，这样就可以避免逐户计算，因而大大减少计算量。设人均收入低于 $x_2$，高于 $x_1$ 的人们之人数比重为 $w_i$（$i=1,\cdots,m$），他们相应的收入比重为 $v_i$（$i=1,\cdots,m$）。这时，计算方法与逐户计算大同小异，逐户计算时我

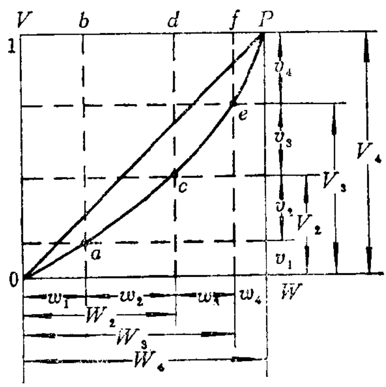



图 1.10

们令 $w_i$ 都相等且为 $\frac{1}{n}$（$n$ 为总户数）。现在只是 $w_i$ 不相等了而已。

设收入水平分为 4 个等级，第一个等级为人均收入20元以下，第二个等级为人均收入在 20～35 元之间，第三个收入等级为人均收入在 35～50 元之间，第四个收入等级为人均收入在 50 元以上。4 个等级的人数比重（或户数比重）分别为 $w_1$，$w_2$，$w_3$，$w_4$，而收入比重分别为 $v_1$，$v_2$，$v_3$，$v_4$。于是曲边梯形 $OabV$ 的面积近似为

$$\frac{1}{2}w_1v_1+w_1v_2+w_1v_3+w_1v_4$$

曲边梯形 $acdb$ 的面积近似为

$$\frac{1}{2}w_2v_2+w_2v_3+w_2v_4$$

曲边梯形 $cefd$ 的面积近似为

$$\frac{1}{2}w_3v_3+w_3v_4$$

最后，曲边三角形 $ePf$ 的面积近似为

$$\frac{1}{2}w_4v_4$$

于是

$$S_B+S_{\Delta OPV}=\frac{1}{2}(w_1v_1+w_2v_2+w_3v_3+w_4v_4)+w_1(v_2+v_3+v_4)+w_2(v_3+v_4)+w_3v_4$$

即

$$S_B=\frac{1}{2}(w_1v_1+w_2v_2+w_3v_3+w_4v_4)+w_1(v_2+v_3+v_4)+w_2(v_3+v_4)+w_3v_4-\frac{1}{2} \qquad (1.7.9)$$

从图 1.10 可看出

$$
\begin{aligned}
v_2+v_3+v_4 &= 1-v_1 = 1-V_1 \\
v_3+v_4 &= 1-(v_1+v_2) = 1-V_2 \\
v_4 &= 1-(v_1+v_2+v_3) = 1-V_3
\end{aligned}
\tag{1.7.10}
$$

其中 $V_1$，$V_2$，$V_3$ 分别为各个等级的累积收入比重，即分别为人均收入不高于 20 元的收入比重，人均收入不高于 35 元的收入比重及人均收入不高于 50 元的收入比重。所以式 (1.7.9) 可改写为

$$
\begin{aligned}
S_B= & \frac{1}{2}(w_1v_1+w_2v_2+w_3v_3+w_4v_4)+w_1(1-V_1) \\
& +w_2(1-V_2)+w_3(1-V_3)-\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{1.7.11}
$$

若收入分组不是 4 而是 $m$，则以上推导不难扩展为

$$
\begin{aligned}
S_B= & \frac{1}{2}(w_1v_1+w_2v_2+\cdots+w_mv_m)+w_1(1-V_1) \\
& +w_2(1-V_2)+\cdots+w_{m-1}(1-V_{m-1})-\frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{1.7.12}
$$

根据式 (1.7.7)，可算出基尼系数为

$$
\begin{aligned}
G=2S_B= & w_1v_1+w_2v_2+\cdots+w_mv_m \\
& +2[w_1(1-V_1)+w_2(1-V_2)+\cdots \\
& +w_{m-1}(1-V_{m-1})]-1
\end{aligned}
\tag{1.7.13}
$$

一般资本主义国家的基尼系数在 0.2～0.6 之间。我国各地的基尼系数在 0.12～0.21 之间。基尼系数太低了不好，太低说明收入分配的绝对平均主义严重，物质刺激不灵敏，经济效率也会低下。基尼系数太高了也不好，太高说明收入分配非常不平等，社会潜在着不安定因素。当然，基尼系数只是对收入分配的一个极其概括的描述，同样面积 $S_B$ 由 $L$ 线

下凸的形状不同，分配的具体细节还会有一定的区别。

基尼系数是政策的反馈信号，它可以定量测度税收、工资及体制改革（如农业责任制）等政策对收入分配的影响。

例如复旦大学唐国兴、郑绍廉根据上海市 500 户家计调查资料计算了 1979 年工资调整前后的基尼系数，工资调整前为 0.142，工资调整后为 0.139，说明 1979 年的工资调整使收入分配更趋平均。

党中央提出让一部分农民先富起来，就是要通过改革体制，提高基尼系数。各种不同责任制对收入分配的具体影响，可以通过基尼系数给出可以测度的反馈信号。

基尼系数又叫集中度，它不仅可以描述收入分配的集中度，还可以描述经济中财产和资本的集中度、人口的地理分布的集中度、工业地理布局的集中度以及专业产品生产的集中度等等。

我们可以将工业布局分为若干个区域，将这些区域的工业产值占工业总产值的比重按从小到大排列。设这个产值比重为 $v_i$（$i=1$，…，$m$，即共有 $m$ 个区域），而 $i$ 区域占总区域面积的比重为 $w_i$（$i=1$，…，$m$），则我们可以用式(1.7.13) 计算工业地理分布的集中度 $G$。

将企业分为 $m$ 大组，设每组企业的个数占所有企业总数的比重为 $w_i$（$i=1$，…，$m$），它们相应的固定资产或净产值比重为 $v_i$，则可用式（1.7.13）计算资本集中度 $G$。

若设某组企业产值占国民总产值的比重为 $w_i$（$i=1$，…，$m$），它们生产的某种专业产品产值占此种专业产品总产值的比重为 $v_i$（$i=1$，…，$m$），则可以用式（1.7.13）计算此种专业产品生产的集中度。

**例** 根据湖北省家计调查资料，湖北省农村 1981 年收

入分配如下表所示

| 人均年收入 | 100以下 | 100～150 | 150～200 | 200～300 | 300～400 | 400～500 | 500以上 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数比率$w_i$ | .0318 | .1635 | .2658 | .4111 | .1037 | .0191 | .0050 |
| 收入比率$v_i$ | .0136 | .0988 | .2297 | .4408 | .1621 | .0389 | .0161 |
| 累积收入比率$V_i$ | .0136 | .1124 | .3421 | .7829 | .9451 | .9839 | 1.0000 |

根据以上数据，我们可以用式（1.7.13）计算基尼系数

$$
\begin{aligned}
G = & w_1v_1+w_2v_2+w_3v_3+w_4v_4+w_5v_5+w_6v_6+w_7v_7 \\
& +2[w_1(1-V_1)+w_2(1-V_2)+w_3(1-V_3) \\
& +w_4(1-V_4)+w_5(1-V_5)+w_6(1-V_6)] \\
& -1 \\
= & 0.0318\times0.0136+0.1635\times0.0988+0.2658 \\
& \times0.2297+0.4111\times0.4408+0.1037\times0.1621 \\
& +0.0191\times0.0389+0.0050\times0.0161 \\
& +2[0.0318(1-0.0136)+0.1635(1-0.1124) \\
& +0.2658(1-0.3421)+0.4111(1-0.7829) \\
& +0.1037(1-0.9451)+0.0191(1-0.9839)] \\
& -1=0.1697
\end{aligned}
$$

## §1.8 分工协作的数学描述

设一个“社会”有三个人，共进行三种经济活动。第 $i$ 个人所进行的第 $j$ 种经济活动用 $x_{ij}$ 表示。下表描述了这个经济系统的结构，即1，2，3个人都分别自给自足地生产和消费1，2，3种产品：

| $x_{ij}$ | | 活动 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 |
| 人 | 1 | 生产消费粮食 | 生产消费衣着 | 生产消费住宅 |
| | 2 | 生产消费粮食 | 生产消费衣着 | 生产消费住宅 |
| | 3 | 生产消费粮食 | 生产消费衣着 | 生产消费住宅 |

上表可以改写成矩阵形式，即

$$\mathrm{X}=\{x_{ij}\}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.8.1}$$

矩阵 X 既是消费矩阵又是生产矩阵。它描述了各个人自给自足的经济活动，**叫自然经济矩阵**。这可以用图 1.11 中三个互相孤立的经济系统表示。图中表示 3 个自给自足生产消费的人，他们互不依赖，各自支出劳动 $L$，收入各种消费品 $x$。

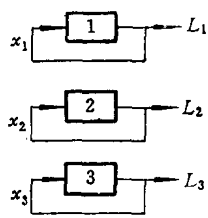


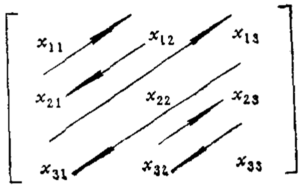

图 1.11

如果三个人分工协作，第 1 个人专门生产粮食，第 2 个人专门生产衣着，第 3 个人专门建筑住宅，则生产活动可以用下面的表来表示：

| $x_{ji}$ | | 生产活动 |
|---|---|---|
| 人 | 1 | 生产粮食 |
| | 2 | 生产衣着 |
| | 3 | 生产住宅 |

上表可写成矩阵形式 $\mathrm{X}'=\{x_{ji}\}$，即

$$\mathrm{X}'=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}=$$




$$=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \tag{1.8.2}$$

式（1.8.2）中的 X′是式（1.8.1）中的 X 矩阵的转置矩阵。从式（1.8.2）可以看出第 1 个人专门生产粮食是以第 2、3 个人不再生产粮食为前提的，即过去由第 2、3 个人从事的自给自足粮食生产活动 $x_{21}$，$x_{31}$ 转变为第 1 个的专门粮食生产活动；同理第 2 个人专门生产衣着是以第 1，3 个人不再生产衣着为前提的；第 3 个人专门生产住宅亦是以第 1，2 个人不再生产住宅为前提的。即分工以生产的集中为前提。这同时意味着自给自足经济的解体，意味着专业生产者对自给自足生产者竞争的胜利。它是经济结构的变革过程。所以分工、集中、竞争、结构变革这些概念都可以用**自然经济矩阵的转置**这种数学语言描述。X′叫**经济转置矩阵**。

通过自然经济矩阵的转置，人们的生产活动专业化了，但消费并不能专业化。第 1 个人不能只吃粮食而不穿衣不住房，第 2、3 个人同样也需要多样化的消费品。于是生产的专业化与消费的多样化就产生了矛盾。一般而言，分工协作的消费矩阵仍保留自然矩阵的特性。我们可以用下表表示分

工协作的消费活动。

| $x_{ij}$ | | 消费活动 | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 消费粮食 | 消费衣着 | 消费住宅 |
| 人 | 2 | 消费粮食 | 消费衣着 | 消费住宅 |
| | 3 | 消费粮食 | 消费衣着 | 消费住宅 |

上表可写成消费矩阵

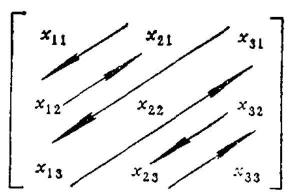
$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.8.3}$$

它与自然经济矩阵没有差别。

经济转置矩阵式（1.8.2）是专业化的生产品矩阵，要将它变成多样化的消费品矩阵式（1.8.3），我们必须将专业生产矩阵式（1.8.2）重新转置成消费矩阵式（1.8.3），这种转置叫**反向转置**，所以式（1.8.3）又叫**反向转置矩阵**。反向转置是商品交换和流通过程。

反向转置矩阵为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}')'=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}'=$$




$$=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \tag{1.8.4}$$

如果第1个人生产的专业产品1的总量为$x_1=x_{11}+x_{12}+x_{13}$

第 2 个人生产的专业产品 2 的总量为$x_2=x_{12}+x_{22}+x_{32}$，第 3 个人生产的专业产品 3 的总量为 $x_3=x_{13}+x_{23}+x_{33}$，则分工协作生产与消费的均衡条件可写为封闭的投入产出系统

$$\begin{aligned} x_1&=x_{11}+x_{21}+x_{31} \\ x_2&=x_{12}+x_{22}+x_{32} \\ x_3&=x_{13}+x_{23}+x_{33} \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

令$a_{ij}=\dfrac{x_{ji}}{x_j}$表示 $j$ 个人生产单位专业产品要消 费 $i$ 种 产 品量，则上式可改写为

$$\begin{aligned} x_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ x_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ x_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

这可以用图1.12来描述。将此图与图1.11比较易知，分工协作的经济系统中，人们不再分为互不相关的孤立系统，而是结合成互相紧密关联的投入 产 出 系统。一个人的产出，就是别人的投入，而每个人的消费品都是很多专业生产者的产品，同时每个专业生产者都是为很多消费者服务。人们不再专为自己生产而是为社会上很多人生产，人们也不再只消费自己的产品，而是消费社会上其他很多人的产品。

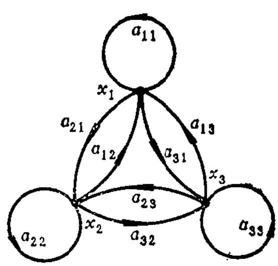



图 1.12

如果分工进一步发达，专业手工业者组成企业，每个人只从事企业内一种专门工种的生产，那么，任何人也不能单独生产最终消费品，而只有分工协作的企业才能生产最终产品。于是个人将劳动支出给企业，从企业收入工资，而企业

将专业产品卖给社会，得到的钱发工资，购买各种生产投入，职工再用工资去购买其它各种消费品。所以实际上是职工通过企业用自己的专业产品去换多样化的消费品，例如钢铁工人通过企业用钢材去换食品、衣着、耐用消费品等等。这个层次的分工协作是与前文中所述的消费品生产的分工协作类似的。但是企业内部各工种的分工协作却是新的高层次的分工协作，因此工厂内又有一种新的投入产出关系。这类分工的进一步发展，企业之间在生产资料的生产方面进行分工协作，这就是图1.13的粗线条所示的投入产出关系。图中大圆圈$A$，$B$分别表示农业部门和工业部门，细线条表示最终消费品的投入产出关系。小圆圈代表企业中的专业生产者，这些专业生产者在企业内也有分工协作和投入产出关系，图中的虚线表示这种关系。

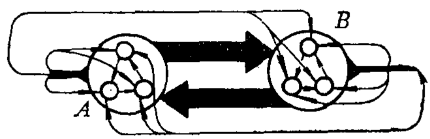



图 1.13

如果略去企业内部的投入产出关系，并将最终产品的投入产出外生化，即将最终产品的需求当作已知给定的量，我们只考虑中间产品的投入产出关系，则可以得到开放型投入产出系统，如图1.14所示。这个网络图的解析式就是

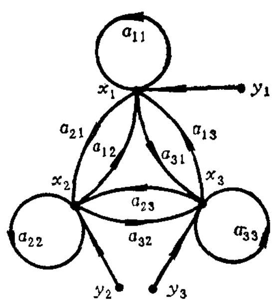



图 1.14

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2 \\
x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3
\end{aligned}
\tag{1.8.7}
$$

其中$a_{ij}$表示 $j$ 部门生产单位产出要消耗 $i$ 部门产品量，即投入产出的直接消耗系数。$x_1$，$x_2$，$x_3$ 分别表示 3 个部门的总产出，$y_1$，$y_2$，$y_3$ 表示 3 个部门生产的最终产品。例如$a_{12}$表示第 2 个部门生产单位产出要消耗的第1个部门的产品量，所以第 2 个部门生产$x_2$单位产出总共消耗的第 1 部门产品量为$a_{12}x_2$，同理$a_{11}x_1$, $a_{13}x_3$分别表示第 1，3部门消耗的第 1 部门产品总量，3 个部门消耗的第 1 部门产品量$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$加上第 1 部门的最终产品量 $y_1$，则得到第 1 部门总产出量 $x_1$。同理，$x_2$，$x_3$ 也等于中间产品消耗量加上最终产品量。

式（1.8.7）可改写成矩阵向量形式

$$X = \mathbf{A}X + Y \tag{1.8.8}$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}。$$

从上式中可解出

$$X = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} Y \tag{1.8.9}$$

如果要考虑最终产品的投入产出关系，则有必要将需求函数引入模型，使最终需求内生化，即最终需求不再外生给定，而是通过模型本身来求解。这就是我们在后文中将讨论的可计算一般均衡模型。

纵观机械力学、热力学、电学的发展历史，这些学科中新的定性概念增加的速度非常快，例如加速度、功、温度、热量、熵、电量、电流强度、电压、电阻、电容、电感……。这些新的定性概念都能定量测度。自然科学之所以能在这几百年长足地发展，与新的定性定量概念增加得迅速直接有关。

有了这些新的概念就可以利用数学这种最成熟最严密的科学理论推出种种重要的结果，创造出新的精密科学的体系。

相对而言，经济学中新的定性定量概念产生的速度很慢，今天经济学中的大多数概念，例如商品销售量、价格、收入、利息等等概念早在上千年前就有了。至今有相当多的经济学概念不能定量测度，因此经济学的精密科学化需要在这方面作出重大努力。

分工程度是经济学中的重要概念，人们早就知道分工有程度的差别，但却无法将这个程度定量描述。正象人们很早就有冷热程度概念，但在热力学出现之前却对冷热程度不能定量地用温度来测度。我们将分工程度定义为**分工度**，并设计了对这个定性概念定量测度的方法。

首先我们定义经济系统中互相独立的“经纪人”之间的两两协作关系为**渠道**。在简单的分工协作系统中，如图1.15($a$)，如果有三个从事专业活动的人，两两之间的协作关系有三个，则这个经济系统有三条协作渠道。若有四个人分工协作且每人都消费其他人的专业产品，则两两协作关系有六条渠道，见图1.15($b$)。若有五个人进行这种分工协作的生产，则协作关系有十条渠道，见图1.15($c$)推而广之，若有$f$个专业“经纪人”，则所有专业“经纪人”全部两两协作关系之渠道数是$f$因素的2组合。令$N$为渠道数量，则

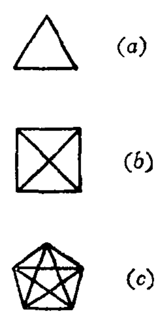



图 1.15

$$N = C_f^2 = \frac{f!}{2(f-2)!} = \frac{1}{2} f(f-1) \quad (1.8.10)$$

渠道中实际发生的物资或信息流叫做经济**流量**。如果每

一渠道中有双方的专业产品或信息向对方流动，则有两个方向相反的流量在一条渠道中发生。例如钢铁厂与机械厂的协作渠道中钢铁厂向机械厂提供钢材，机械厂向钢铁厂提供机床，这一协作渠道中就有两个流量发生。设流量数为$M$，并令所有专业经纪人两两之间都有协作渠道，所有渠道中都是两个流量的经济系统为**完全协作系统**，于是完全协作系统中的流量数$M$可用专业经纪人数$f$表示，即

$$M=2N=f(f-1) \tag{1.8.11}$$

从中解出$f$，则得到完全协作系统的专业经纪人计算式

$$f=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4M}\right) \tag{1.8.12}$$

我们定义$f$为**分工度**。实际经济系统中每个渠道中不一定有两个流量，比如钢铁厂对铀矿的协作渠道中，钢铁厂向铀矿提供钢材，而铀矿并不直接向钢铁厂提供任何流量。有些专业“经纪人”之间甚至根本不存在直接协作渠道，例如晶体管制造厂与甜菜生产者之间没有直接协作渠道。为了反映这种特点我们将完全协作系统的分工度定义为系统的最大分工度，用$f_m$表示，而完全协作系统的协作渠道数为$N_m$，相应的流量数为$M_m$。实际经济系统的分工度$f$往往小于$f_m$，同样实际协作渠道数$N$小于$N_m$，实际流量数$M$小于$M_m$。

不过，我们只要调查一个经济系统中所有经纪人之间的流量数$M$，则可利用式（1.8.12）算出这个系统的分工度$f$。

例如图1.16中，$A$是制造工业企业，它下面分三个专业工种经纪人，用小圈表示。这三个经纪人之间有两个互相有流量，第三个经纪人与这二者之间有单向流通量。三个经纪人与企业总经纪人之间有双向流通量（用虚线表示）。制造业

对全社会所有经纪人提供最终产品，这都是单向流量，用图中的细长曲线表示。$B$是冶金企业，企业内各工序间有单向流量，各工序经纪人与企业经纪人有双向流量，以信息形式出现，用虚线表示。$B$企业不提供最终产品。$A$，$B$企业之间有生产资料流通，用双向箭头表示。$C$企业是农业企业，下属三个专业工种经纪人，三者之间有单向流量，他们与企业经纪人之间有双向流量，用虚线表示。农业企业还向全社会所有经纪人提供最终产品，用单向细曲线表示。$A$，$B$企业向农业企业$C$提供生产资料，即中间产品。仔细数一下图1.16中的流量数（虚线一根表示两个流量）共有

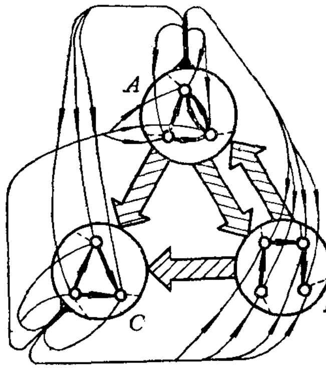



图 1.16

$$M=2\times3+2\times3+2\times4+2\times(3+3+4)+4+3+3+4=54$$

将$M=54$代入式（1.8.12），则可算出这个系统的分工度

$$f=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4M}\right)=7.8655$$

这实际上是将多层次复杂的分工化成了类似图1.15那种一层次两两专业之间都有双向流量发生的完全协作形式。$f$就等价于一层次完全协作系统中的专业经纪人数。所以上例中的复杂分工等价于7.8655个专业经纪人的简单的完全协作系统。

对于完全自给自足的自然经济，协作渠道数$N$和流通量数$M$都等于0，则分工度

$$f=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4M}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\times 0}\right)$$
$$=1$$

所以分工度的最小值等于1。

由于分工度定义为完全协作系统的专业经纪人人数，故对于完全协作系统而言，其大系统的分工度$f$为下属子系统分工度$f_1$，…，$f_n$之总和，即

$$f=\sum_{i=1}^{n}f_i \tag{1.8.13}$$

其中$f$为大系统分工度，$f_i$为第$i$个下属子系统分工度。

对于一般的经济系统而言，其分工度$f$往往小于完全协作状态下（即所有专业之间都有协作渠道，所有渠道中都有双向流量）的最大分工度$f_m$。也就是实际流量数$M$小于最大流量数$M_m$。设$f$与$f_m$之比率为**流量密集度系数**$\xi$，则

$$\xi=\frac{f}{f_m} \tag{1.8.14}$$

从上式可导出

$$f_m=\frac{1}{\xi}f \tag{1.8.15}$$

令　$\eta=\frac{1}{\xi}$为**流量稀疏度系数**，则上式可改写为

$$f_m=\eta f \tag{1.8.16}$$

若大系统的分工度为$f$，其流量密集度为$\xi$。大系统下属两个子系统，其分工度分别为$f_1$，$f_2$，而流量稀疏度分别为$\eta_1$，$\eta_2$，由于大系统最大分工度$f_m$等于子系统最大分工度

$f_{1m}$，$f_{2m}$ 之和，即

$$f_m = f_{1m} + f_{2m} \tag{1.8.17}$$

将 $f_m = \frac{1}{\xi} f$，$f_{1m} = \eta_1 f_1$，$f_{2m} = \eta_2 f_2$ 代入上式，则

$$\frac{1}{\xi} f = \eta_1 f_1 + \eta_2 f_2$$

即

$$f = \xi(\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2) \tag{1.8.18}$$

也就是说大系统分工度等于子系统分工度的加权和，其权重就是大系统流量密集度与子系统流量稀疏度之积（即大系统流量密集度与子系统流量密集度的比率）。对于完全协作系统，由于

$$f = f_m,\quad f_1 = f_{1m},\quad f_2 = f_{2m}$$

所以 $\xi = 1$，$\xi_1 = 1$，$\xi_2 = 1$，因而 $\eta_1 = \frac{1}{\xi_1} = 1$，$\eta_2 = \frac{1}{\xi_2} = 1$，所以

$$\begin{aligned} f &= \xi(\eta_1 f_1 + \eta_2 f_2) \\ &= f_1 + f_2 \end{aligned}$$

可见分工度的特性是具备可加性。

上文中我们讨论了用矩阵转置描述分工协作关系的方法，并提到经济结构分工度的提高等价于专业产品生产集中度的提高。现在我们来严格定义经济结构的集中度概念。我们用经济结构的基尼系数描述这种集中度。

设 $j$ 种产品生产的集中度（基尼系数）为 $G_j$，则 $G_j$ 按式（1.7.13）关于基尼系数计算公式可定义为

$$\begin{aligned} G_j = {} & w_1 v_1^j + w_2 v_2^j + \cdots + w_m v_m^j + 2\,[w_1(1 - V_1^j) \\ & + w_2(1 - V_2^j) + \cdots + w_{m-1} \\ & \times (1 - V_{m-1}^j)] - 1 \end{aligned} \tag{1.8.19}$$

其中 $w_i$（$i = 1, \cdots, m$）为 $i$ 组经纪人占总经纪人数的比

重，$m$为经纪人的组数。$v_i^j$为$i$组经纪人生产的$j$种专业产品占全社会$j$产品值的比重。$j=1,\cdots,n$为专业产品种数，$V_i^j$为专业产品产值的累积比重，它是专业产品产值不高于某一水平的所有经纪人生产的此种专业产品值占$j$种专业产品总值的累积比重。

又设$j$种商品产值占社会总产值的比重为$\alpha_j$，则**经济结构集中度**$G$等于**专业产品生产的集中度**$G_j$用$\alpha_j$($j=1,\cdots,n$)加权和：

$$G=\sum_{j=1}^{n}\alpha_jG_j=\alpha_1G_1+\cdots+\alpha_nG_n \qquad (1.8.20)$$

经济结构集中度$G$，即基尼系数小于1大于0，而（1.8.14）式表示的流量密集度系数

$$\xi=\frac{f}{f_m}$$

亦小于1大于0。分工度$f$越高，则$\xi$值越高；分工度越高，专业产品越是集中在少数专业企业生产，即专业产品生产集中度$G_j$越高，因而经济结构集中度$G$亦越高。所以$\xi$在0～1之间增大时，$G$也在0～1之间增大。可见$\xi$与$G$存在着正相关，$\xi$越大$G$也会越大。下例将说明这一点。

**例** 图1.17中的$A$，$B$，$C$，$D$，$E$是5个经纪人，其中$A$，$B$生产农产品，用数字1表示，$C$，$D$生产畜产品，用数字2表示；$E$生产工业品，用数字3表示。每个人都要消费产品1，2，3。$E$向$A$，$B$，$C$，$D$供给产品3；而$A$，$B$向$E$及$C$，$D$供给产品1；$C$，$D$向$E$及$A$，$B$供给产品

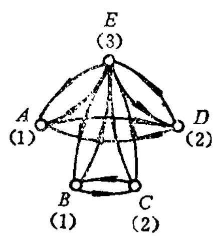


图 1.17

2。又设产品1 2，3的产值分别占三种产品总产值的$\frac{1}{3}$。

我们首先分别计算各种专业产品的生产集中度即基尼系数。

产品1：$C$，$D$，$E$三者完全不生产产品1，所以他们生产的产品1的产值比重分别为$v_1^1=v_2^1=v_3^1=0$，但三者的人数比重分别为$w_1=w_2=w_3=\frac{1}{5}$。若$A$生产产品1的产值比重为$\frac{2}{5}$，$B$生产产品1的产值比重为$\frac{3}{5}$，则$v_4^1=\frac{2}{5}$，$v_5^1=\frac{3}{5}$，而二者的人数比重为$w_4=w_5=\frac{1}{5}$。于是我们有图1.18中的洛仑兹曲线$PQR$。洛仑兹曲线上的点$R$：$W=\frac{3}{5}$，$V=0$表示$C$，$D$，$E$三者占总人数的$\frac{3}{5}$，而他们生产的产品1的比重为0。点$Q$：$W=\frac{4}{5}$，$V=\frac{2}{5}$，表示加上$A$之后，$A$，$C$，$D$，$E$的人数累积比重上升到$\frac{4}{5}$，而4人生产的产品1的累积产值比重为$0+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$。洛仑兹曲线$PQR$上的$P$点表示加上$B$后，人数累积比重为$\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$，产品1的累积产值比重亦达到$0+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$。

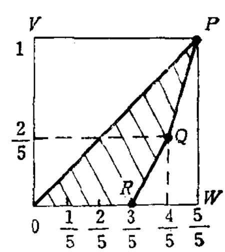


图 1.18

将$v_1^1=v_2^1=v_3^1=0$，$v_4^1=\frac{2}{5}$，$v_5^1=\frac{3}{5}$；$w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=\frac{1}{5}$；

$V_1^1=1-(v_2^1+v_3^1+v_4^1+v_5^1)=1-\Big(\frac{2}{5}$

$+\frac{3}{5}\Big)=0$，$V_2^1=1-(v_3^1+v_4^1+v_5^1)=0$，$V_3^1=1-(v_4^1+v_5^1)=0$，$V_4^1=1-v_5^1=\frac{2}{5}$代入式（1.8.19），则可算出产品1的生产集中度

$$
\begin{aligned}
G_1=&w_1v_1^1+w_2v_2^1+w_3v_3^1+w_4v_4^1+w_5v_5^1\\
&+2[w_1(1-V_1^1)+w_2(1-V_2^1)\\
&+w_3(1-V_3^1)+w_4(1-V_4^1)]-1\\
=&\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+2\Big[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\\
&+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\Big]-1=0.64
\end{aligned}
$$

用类似的方法，我们可以算得第2种专业产品的生产集中度。若$C$，$D$分别生产产品2的$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$，则$v_1^2=v_2^2=v_3^2=0$，$v_4^2=\frac{1}{3}$，$v_5^2=\frac{2}{3}$；$w_1=w_2=w_3=w_4=w_5=\frac{1}{5}$；$V_1^2=0$，$V_2^2=0$，$V_3^2=0$，$V_4^2=\frac{1}{3}$。代入式（1.8.19），则可算出产品2的生产集中度

$$
\begin{aligned}
G_2=&\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\\
&+2\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\Big)-1\\
=&0.67
\end{aligned}
$$

由于第3种产品完全集中在$E$处生产，所以其生产集中度

$$G_3=1$$

将$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$（即三种产品产值比重都是$\frac{1}{3}$）和$G_1=$

0.64，$G_2=0.67$，$G_3=1$ 代入式（1.8.20），则可算出经济结构集中度

$$
\begin{aligned}
G &= \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \alpha_3 G_3 \\
&= \frac{1}{3} \times 0.64 + \frac{1}{3} \times 0.67 + \frac{1}{3} \times 1 \\
&= 0.77
\end{aligned}
$$

回顾图1.17，其中流量数$M=12$，分工度

$$
f = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4M}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+48}\right) = 4
$$

系统最大分工度

$$
f_m = 5
$$

所以流量密集度

$$
\xi = \frac{f}{f_m} = \frac{4}{5} = 0.8
$$

与经济集中度$G=0.77$的数值相当接近。

由于分工与经济结构集中度的等价性，所以我们也可以用经济结构集中度$G$描述分工程度。不过分工度$f$可以与流量数直接换算，而$G$与流量数不便直接换算，所以分工度$f$在经济分析中有特别的便利。

经济结构的集中度与工业地理布局的集中度是两个不同的概念。我们可以将工业分散布局，因而工业布局的集中度低，但可以同时存在较高的分工度和经济结构集中度。反过来，我们可以将工业集中在一个城市，工业布局的集中度很高，但若每个企业都搞大而全、小而全，则分工度和经济结构集中度都不高。

不过工业布局的集中度的提高可以大大促进经济结构集中度的提高，因为工业集中布局会使经纪人之间的平均距离大大下降，因而使分工度易于提高。

# 第二章　消费者的经济效果及其最优化

## §2.1　效用函数

数理经济学首先研究消费者的最优经济效果问题，然后研究生产者的最优经济效果问题，再分析二者的协调，即一般均衡，也就是我们所说的整体综合经济效果的最优化。之所以将消费者最优经济效果摆在生产者最优经济效果前面，不但是因为生产者为消费者服务，经济的最终目的是使消费者的经济效果最优化，不是为生产而生产；而且消费者的经济效果分析比生产者的经济效果分析困难得多。生产者最优经济效果的目标函数简单，这就是利润最大化，而消费者经济效果要找到一种单一的综合经济效果指标却不容易。

首先我们不能用消费者消费的商品物理量来衡量经济效果，因为某些物理量大的消费方案其消费效果不如物理量小的消费方案。例如我们可以吃 5 斤肉，18 斤米，也可以吃 0.1 斤肉，30 斤米，这两个消费方案如果用总重量来比较，前一方案消费的总重量为 5 ＋18＝23 斤，后一方案消费的总重量为 0.1＋30＝30.1 斤。但对于饭量不大的人，吃 30 斤米实在不舒服，而多吃点肉却很舒服，也就是说前一消费方案的消费效果比后一方案好得多。实际生活中，这种物理量少，但消费效果反而好的例子多得很。

是不是我们可以想出测度商品质量的办法，用这种物理测度量来计量商品的消费效果呢？这种办法实际上也是片面

的。比如让你每个月吃 10 斤最高级的米，或者让你每个月吃 25 斤质量较低的米，你会觉得哪种消费方案效果好呢。当然你会觉得 25 斤低质米效果好，因为一个月只吃 10 斤米根本就吃不饱，即使米质非常好。所以消费效果必须综合考虑数量和质量。问题是怎么综合，数量与质量不可比，不能加，不同商品的数量单位可能不同，质量测度单位也可能不同更无法加到一块。

有人建议将商品的使用价值即上文所说的消费效果固定，然后来分析得到同一固定使用价值所付出的劳动和费用，这样来分析消费者的最优经济效果问题。这种想法是不错的，但是怎样固定使用价值呢？是不是固定了消费商品的数量、质量就固定了使用价值呢？回答是否定的。一定数量和质量的商品对不同人的消费效果（即使用价值）是很不一样的。小说对文盲来说其使用价值几等于 0，而对于一个文思敏捷、多愁善感的大学生来说，其使用价值却很高。另外同样数量的商品，同样质量的商品在不同的时刻，不同的场合，对同一个人的消费效果也很不一样。肚子饿和肚子不饿时，一顿便饭的消费效果是根本不同的。同样一度电力提供在生产生活紧张进行的时候，还是在夜深人静的时候，其效果也完全不同。这都说明了一种商品的使用价值是变量而不是常量，它是不能固定不变的。这一特点同样适用于货币，货币对人们的消费效果也是变化的，例如对很有钱的人来说，一元钱的消费并不能给他带来很大幸福，而对于一个生活困迫的人来说，一分钱要掰两半用，一元钱就能为他解决很多问题了。既然货币本身的使用价值也是个变量，当然不能用它来作为综合消费效果的尺度了。正象我们不能用热胀冷缩很厉害的金属作米尺一样。

又有人提出，我们可以将劳动或费用固定，以单位劳动或单位费用产出的产品量作为经济效果指标。这种办法显然是行不通的。不但是由于上文中说的数量大的消费方案不一定效果好，而且对于多种商品来说，固定劳动或费用，你可以多生产食物，少生产衣着，也可以多生产衣着，少生产食物，究竟多生产哪种商品为好呢？单用产量与费用之比并不能解决这个问题。

归纳以上讨论，我们分析消费者的经济效果问题就是要将不同商品的数量、质量等指标化为单一的综合经济效果指标，这种综合经济效果指标是否存在就是数理经济学效用函数存在定理所要解决的问题。

从数学上来说，消费者综合经济效果指标是否存在就是 $n$ 维空间点的集合是否能与一维实数对应的问题。为了分析这个问题，有必要引入**商品空间**概念。

我们用图 2.1 中的横轴表示肉的消费量$x_1$，用纵轴表示米的消费量$x_2$，由于消费的肉与米都非负，所以我们只考虑$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$ 的第一象限，这个象限中有无穷多个点，每一个点都可以用其横坐标$x_1$和纵坐标$x_2$表示。我们可以将每一点的横坐标和纵坐标写成向量形式

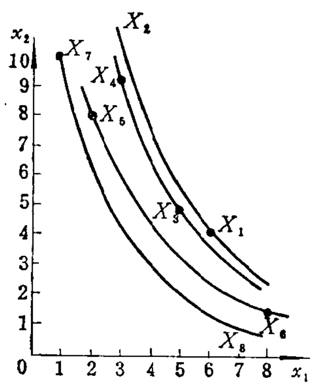



图 2.1

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

例如在$X_1$点，$x_1=6$，$x_2=4$，则$X_1=(6，4)'$表

示消费6斤肉4斤米（斜撇“′”表示向量的转置），$\boldsymbol{X}_2=(2, 15.8)'$表示消费2斤肉，15.8斤米，如此等等。我们叫向量$\boldsymbol{X}$为**商品束**，又称$\boldsymbol{X}$为一种**消费方案**。第一象限中有无数点，它们可以用无数个$X$向量表示，也就是说可能的消费方案有无穷多个。这无穷多个点构成的集合就是第一象限，我们称之为**商品平面**，它表示所有可能的消费方案的集合。

若我们不只消费两种商品，而是消费$n$种商品，则可以用向量

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

表示消费方案，它就是$n$维空间第一卦限中的点。第一卦限中有无穷多个点，它们代表无穷多个消费方案，可以用无穷多个向量$\boldsymbol{X}=(x_1, \cdots, x_n)'$表示。所有这些消费方案的集合，即$\boldsymbol{X}$向量的集合，也就是第一卦限所有点的集合构成一个**商品空间**。令$\mathscr{C}$为所有可能的消费方案的集合，则这个集合可记为

$$\mathscr{C}=\{\boldsymbol{X}=(x_1, \cdots, x_n)' | x_j \geqslant 0, \ j=1, \cdots, n\}, \tag{2.1.2}$$

例如图（2.1）中的8个点分别可用下列向量表示：

$\boldsymbol{X}_1=(6, 4)'$，表示消费6斤肉4斤米，

$\boldsymbol{X}_2=(2, 15.8)'$，表示消费2斤肉15.8斤米，

$\boldsymbol{X}_3=(5, 5)'$，表示消费5斤肉5斤米，

$\boldsymbol{X}_4=(3, 9.4)'$，表示消费3斤肉9.4斤米，

$\boldsymbol{X}_5=(2, 8)'$，表示消费2斤肉8斤米，

$\boldsymbol{X}_6=(8, 1.4)'$，表示消费8斤肉1.4斤米，

$\boldsymbol{X}_7=(1, 10)'$，表示消费1斤肉10斤米，

$X_8=(7, 0.88)'$，表示消费7斤肉0.88斤米。

对于我们来说，虽然无法具体说出吃1斤肉或1斤米的消费效果是多少，但是，只要给出很多消费方案，这些方案用$n$维向量或$n$维空间中的点表示，我们总可以对这些方案进行两两比较，说出它们的优劣次序来。比如认为吃6斤肉4斤米（$X_1$）与吃2斤肉15.8斤米（$X_2$）一样舒服，而吃5斤肉5斤米（$X_3$）与吃3斤肉9.4斤米（$X_4$）一样舒服，吃2斤肉8斤米（$X_5$）与吃8斤肉1.4斤米（$X_6$）一样舒服，吃1斤肉10斤米（$X_7$）与吃7斤肉0.88斤米（$X_8$）一样舒服；并且认为吃6斤肉4斤米（$X_1$）优于吃5斤肉5斤米（$X_3$），而吃5斤肉5斤米（$X_3$）又优于2斤肉8斤米（$X_5$），吃2斤肉8斤米（$X_5$）又优于1斤肉10斤米（$X_7$）。

我们还可以举出无穷多个消费方案，对于任一两个方案$X_i$与$X_j$，总可以说出下列三种关系中的一个：

$X_i$不次于$X_j$，

$X_i$不优于$X_j$，

或$X_i$与$X_j$无差异。

用符号$\succcurlyeq$表示**不次于**关系，用$\preccurlyeq$表示**不优于**关系，用$\sim$表示**无差异**即**等价**关系，其中无差异关系$\sim$成立意味着不次于关系$\succcurlyeq$和不优于关系$\preccurlyeq$同时成立。有了这些符号，则上述消费方案之间的两两比较可记为

$$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2\\15.8\end{pmatrix}\succcurlyeq\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3\\9.4\end{pmatrix}\succcurlyeq\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}8\\1.4\end{pmatrix}\succcurlyeq\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}7\\0.88\end{pmatrix}$$

如果对所有的商品消费方案我们都能两两比较优劣，给出上述的优劣次序，即给出一种**偏好序**，则将一个有序的一维实数与这种偏好序对应，那么这个实数就是各种商品消费的综合经济效果指标，它就是**效用函数**。

上述不次于关系$\succcurlyeq$是一种所谓**弱偏好关系**，若没有下边的等号，则为**强偏好关系**。

如果商品消费方案$\boldsymbol{X}_i$与$\boldsymbol{X}_j$之间总存在下列关系中之一种：

$\boldsymbol{X}_i \succcurlyeq \boldsymbol{X}_j$，或$\boldsymbol{X}_i \preccurlyeq \boldsymbol{X}_j$，或$\boldsymbol{X}_i \sim \boldsymbol{X}_j$，即$\boldsymbol{X}_i \succcurlyeq \boldsymbol{X}_j$与$\boldsymbol{X}_i \preccurlyeq \boldsymbol{X}_j$都成立　　(2.1.3)

则称商品空间中的弱偏好关系是**完全偏好序**。

完全偏好序意味着不存在不能判断孰优孰劣或是否等价的两种消费方案，也就是说商品空间不存在没有偏好的空隙。

偏好序具有**自返性、传递性**。

自返性是说商品消费方案$\boldsymbol{X}$不次于其自身，即

$$\boldsymbol{X} \succcurlyeq \boldsymbol{X} \tag{2.1.4}$$

传递性是说若

$$\boldsymbol{X}_1 \succcurlyeq \boldsymbol{X}_2，\boldsymbol{X}_2 \succcurlyeq \boldsymbol{X}_3，则\ \boldsymbol{X}_1 \succcurlyeq \boldsymbol{X}_3 \tag{2.1.5}$$

**公理 1**　弱偏好关系是完全偏好序意味着等价关系（即无差异关系）具有**自返性，传递性**和**对称性**，即

（1）$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{X}$　　(2.1.6)

（2）若$\boldsymbol{X}_1 \sim \boldsymbol{X}_2$，且$\boldsymbol{X}_2 \sim \boldsymbol{X}_3$，则$\boldsymbol{X}_1 \sim \boldsymbol{X}_3$　　(2.1.7)

（3）$\boldsymbol{X}_1 \sim \boldsymbol{X}_2$意味着$\boldsymbol{X}_2 \sim \boldsymbol{X}_1$

**公理 2**　若商品空间的消费方案$\boldsymbol{X} \succcurlyeq \boldsymbol{X}_0$，其中$\boldsymbol{X}_0$为某一固定的消费方案，$\boldsymbol{X}$为不次于$\boldsymbol{X}_0$的若干消费方案，因此$\boldsymbol{X} \succcurlyeq \boldsymbol{X}_0$表示若干个弱偏好关系，可称为**偏好集合**。对于弱偏好关系来说，这种偏好集合是连续的；若$\boldsymbol{X} \preccurlyeq \boldsymbol{X}_0$，则对于弱偏好关系而言，这种非偏好集合亦是连续的。

有了完全偏好序和连续性两个公理，则存在定义于消费方案集合之上的连续实函数$U(\boldsymbol{X})$，叫做效用函数，它满足

$$U(\boldsymbol{X}_i) \geqslant U(\boldsymbol{X}_j)，当然仅当 \boldsymbol{X}_i \succcurlyeq \boldsymbol{X}_j \qquad (2.1.8)$$

这就是著名的效用函数存在定理。这个定理说明我们可以用一个连续实函数来作为各种消费方案综合经济效果的指标。这一定理由G.Debreu于1954年证出，1968年、1974年又有人改进了证明。

在给出肉与米的消费量时，我们说 $\boldsymbol{X}_i$ 消费方案优于 $\boldsymbol{X}_j$ 消费方案，这就是给出了一个综合效果的比较。虽然我们说不出综合效果的大小，但是谁优谁劣这种次序可以说出来。所以对于图2.1而言，对于二维平面第一象限中的每一点，都可以给出它与其它点比较的综合经济效果的次序。如果 $\boldsymbol{X}_i \sim \boldsymbol{X}_j$，则可以说两种消费方案的经济效果是相等的。所有效果相等的点可以用光滑的曲线联成**无差异曲线**。这条曲线上的不同点，由于横坐标 $x_1$ 与纵坐标 $x_2$ 不等，所以消费的两种商品量不等，但是综合消费效果是一样的。在比较 $\boldsymbol{X}_i$ 方案与 $\boldsymbol{X}_j$ 方案的消费效果时，我们不但给出了两种商品的消费量 $x_1$，$x_2$，而且给出了消费效果的次序，所以我们讨论的问题有三维，除了 $x_1$，$x_2$ 外还有第三维 $U(x_1, x_2)$。图2.2中 $x_1$-$x_2$ 平面中的无差异曲线就是图2.1的平面图中的无差异曲线。这些无差异曲线越靠右上方则表示的效用越高。因为所有商品数量都增加，效用是增加的。对于图2.2中的三维空间而言，我们可以把无差异曲线升高，对于综合消费效果高无差异曲线（即右上方的无差异曲线）可以升得高些；而对于综合效果低的无差异曲线，可以升得低些，这样就把隐函在无差异曲线排列次序中的效用概念用第三维显示出来了。无数条无差异曲线升高后构成一个曲面，它象一个山坡的表面。对于这个三维曲面而言，它上面的点表示给定两种商品消费量 $x_1$，$x_2$ 后，综合效果就可以用第三维坐

标$U$确定。也就是说$U$是向量$\mathbf{X}=(x_1, x_2)'$的函数。从解析几何不难理解，三维空间的曲面可以用二元函数表示，反过来二元函数也可用三维空间曲面表示。

用平行于$x_1$-$x_2$平面的平面切这个曲面，则可以得到图2.2中虚线示出的等高线，而$x_1$-$x_2$平面面上的无差异曲线就是等高线的投影，正象地图上的等高线一样。

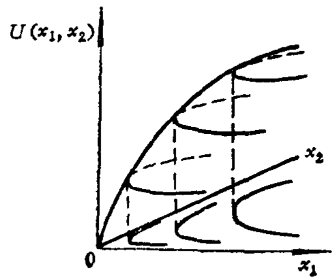



图 2.2

不难验证，前面列举的肉与米消费方案的优劣比较满足效用函数

$$U=45.1x_1^{0.5}x_2^{0.4} \tag{2.1.9}$$

在$x_1$-$x_2$-$U$三维空间，这个函数就是一个曲面，其等高线在$x_1$-$x_2$平面的投影就是图2.1中的无差异曲线。

但是我们如果把$x_1$-$x_2$平面中的无差异曲线升高的幅度取得不一样，那么得到的空间曲面就大有径庭了。也就是说，若效用的单位取得不一样，则与图2.1中无差异曲线对应的并不一定是（2.1.9）式，也可能是$U=45/x_1^{0.5}x_2^{0.4}$。实际上人们并没有办法规定统一的效用单位，因为效用是人们对幸福或满足程度的主观评价，它随各人的嗜好、价值观点、美学概念不同而不同，因此人与人的效用很难比较，这就更难规定统一的效用测度单位了。也就是说，无差异曲线表示的消费综合效果次序虽然存在，但效用函数却因单位不统一而不唯一。不过我们最关心的还是在效用不变的情况下，一种商品替代另一种商品的能力。例如，当我吃6斤肉

4 斤米时，若要使舒服程度不变，则再增加 1 斤肉的 消 费，可以减少 0.8333 斤米的消费。这表示肉吃得很 多时，加 1 斤肉的效用只能顶 0.8333 斤米的效用。如果我 吃 2 斤 肉，15.8 斤米，则再吃 1 斤肉，若保持效用不变，可以减少 9.875 斤米的消费。也就是说我消费肉与米的比例为 2∶15.8 时，再加 1 斤肉的效用抵得上 9.875 斤米的效用。增加一点肉，可以减少多少米而使效用不变，这叫商品的边际替代率，$x_2$ 对 $x_1$ 的边际替代率用 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 表示，它意味着增加一点 $x_1$，可以减少多少 $x_2$ 而使效用不变。知道了边际替代率我们就知道了商品的相对效用，尽管我们并不清楚一斤肉或一斤米的绝对效用是多少。所以我们集中精力来讨论边际替代率 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 是不是唯一的，如果它具备唯一性，且如果效用函数的不唯一性并不影响边际替代率的唯一性，那么我们就可以躲开人与人的效用比较问题，而来比较不同人的边际替代率。

如果我们改变效用的测度单位，这相当于将 效 用 函 数 $U(\boldsymbol{X})$ 经单调递增变换 $F$ 得到新的效用函数

$$V = F\{U(\boldsymbol{X})\} \tag{2.1.10}$$

其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,\ x_2)$ 为向量，则我们有

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = F' \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = F' \frac{\partial U}{\partial x_2} \tag{2.1.11}$$

边际替代率 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 就 是 $x_1$-$x_2$ 平面内无差异曲线之切线斜率，令其为 $s$，根据隐函数求导法则

$$s=\frac{dx_2}{dx_1}=\quad\frac{\partial V}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial V}{\partial x_2}=\quad\frac{F'\,\partial U/\partial x_1}{F'\,\partial U/\partial x_2}$$

$$=-\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}\tag{2.1.12}$$

可见，效用函数$U(\boldsymbol{X})$经单调递增变换后得到的新效用函数$V$的边际替代率$s$仍不变。这就证明了无差异曲线的边际替代率是唯一的，尽管效用函数不唯一。这也就证明了无差异曲线是唯一的。

例如效用函数$U=45.1x_1^{0.5}x_2^{0.4}$与效用函数$U=451x_1^{0.5}x_2^{0.4}$的无差异曲线之边际替代率都是

$$s=\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}=-\frac{22.55x_1^{-0.5}x_2^{0.4}}{18.04x_1^{0.5}x_2^{-0.6}}$$

$$=-1.2500\frac{x_2}{x_1}\tag{2.1.13}$$

不管$x_1$和$x_2$等于多少，我们都可以利用上式方便地求出两种商品的相对效用，它是唯一的，不会因效用测度单位变化而变化。

我们有了测度消费者综合经济效果的指标——效用函数及相对效用测度——边际替代率概念，则我们可以利用它们来研究消费者在有限收入和给定价格时，怎样做出最优生活计划，使效用最大化，也就是使日子过得最满足。这一最优经济效果问题在只有两种商品时可记为：

$$\max:\ U(x_1,\ x_2)$$

服从约束

$$p_1x_1+p_2x_2=M\tag{2.1.14}$$

其中 $p_1$，$p_2$ 分别为给定的两种商品的价格，$M$为收入。约束条件意味着购买两种商品的总金额等于收入。消费者的问题是选择 $x_1$ 和 $x_2$ 的值使效用$U$最大化。即找出各种商品消费的最优比例，以便用有限的钱使自己得到最大的满足。

这是一个典型的条件极值问题。实际上大多数最优经济效果问题都是条件极值问题。因此数学规划理论、优化理论是经济分析的有力工具。对上述等式约束的条件极值问题，我们可以用拉格朗日乘数法则求解。

作拉氏函数

$$L=U(x_1,\ x_2)+\lambda(M-p_1x_1-p_2x_2) \qquad (2.1.15)$$

最优经济效果的一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}&=U_1-\lambda p_1=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}&=U_2-\lambda p_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=M-p_1x_1-p_2x_2=0\end{aligned} \qquad (2.1.16)$$

其中 $U_1=\dfrac{\partial U}{\partial x_1}$，$U_2=\dfrac{\partial U}{\partial x_2}$。

从 (2.1.16) 可导出

$$\frac{U_1}{U_2}=-\frac{dx_2}{dx_1}=s=\frac{p_1}{p_2} \qquad (2.1.17)$$

也就是说，要达到最优经济效果，则必须适当选择商品的品种、数量组合，使两种商品之边际替代率等于相应的商品价格比。其几何意义如图 2.3 所示。图中的预算约束线 $RQ$ 表示预算约束方程 $p_1x_1+p_2x_2=M$。$RQ$ 与横轴、纵轴围成的斜线示出的区域叫可行区域，在可行区域内任何一个点

$p(x_1, x_2)$ 的坐标满足关系 $p_1x_1+p_2x_2\leqslant M$。消费方案只有在这个区域中选择才不会超过预算约束。图中无差异曲线1的效用最高，但它与可行区域没有交点，即在现行价格条件和现有收入水平下，无差异曲线1上的点所代表的消费方案是达不到的，也就是东西太贵，收入太少，无法达到那么高的生活水平。无差异曲线3有很长一段在可行区域内，但它的效用很低，现有收入水平完全可以得到比它高的效用。只有在 $A$ 点，无差异曲线2与预算约束线 $RQ$ 相切，无差异曲线与可行区域有一个交点，且使效用水平达到最大。$A$ 点的坐标 $(x_1^*, x_2^*)$ 就是两种商品的最优消费量，而二者的最优消费比例为 $\frac{x_1^*}{x_2^*}$。无差异曲线在 $A$ 点的切线就是 $RQ$，所以无差异曲线的边际替代率 $\frac{dx_2}{dx_1}$ 等于 $RQ$ 的斜率。而 $RQ$ 的斜率为 $-\frac{p_1}{p_2}$。这就说明了式 (2.1.17) 的几何意义。

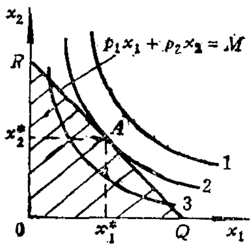



图 2.3

从 (2.1.17) 还可导出

$$\frac{U_1}{p_1}=\frac{U_2}{p_2}=\lambda \qquad (2.1.18)$$

其经济学意义是，消费者达到最优经济效果的条件是所有商品的边际效用与其价格之比都相等且等于拉氏乘数 λ。也就是说花在购买每种商品上的每元钱支出增加的效用都相等。只要在一种商品的购买上所花的一元钱所获得的边际效用（即增加的效用）低于其它商品，则消费者就可以减少此种商

品的购买，增加其它商品的购买而使他的总效用函数在不超过预算约束的条件下进一步增大。这就是著名的“Gossen第二法则”，又叫“边际效用均等法则”。拉格朗日乘数$\lambda$表示每元钱支出的边际效用，叫做“收入之边际效用”，即“收入之影子价格”。

## §2.2 效用函数的特性及消费者最优经济效果的充分条件●

一般我们假定效用函数为商品消费量$x_i$($i=1,\cdots,n$)的单调递增函数，即

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}>0, \quad i=1, \cdots, n \qquad (2.2.1)$$

$\frac{\partial U}{\partial x_i}$为商品的边际效用，表示$x_i$增加微小量，总效用$U$的增加量。边际效用大于0意味着人心不足，人们据有的商品越多，总的满足感即效用会增加。

从上节最优经济效果问题的二阶条件，我们也能导出效用函数的一些极重要特性。

效用函数取极大值的二阶条件是效用函数为严格准凹函数或严格凹函数，这意味着所有可能的消费方案构成的集合为凸集。

**定义1** 若点$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2\in S$，则当

$$\boldsymbol{X}_3=(1-a)\boldsymbol{X}_1+a\boldsymbol{X}_2 \qquad 0<a<1 \qquad (2.2.2)$$

亦使$\boldsymbol{X}_3\in\mathcal{S}$时，$n$维欧氏空间$R^n$中的点集合$\mathcal{S}$是**凸性**的。

**定义2** 若集合$\mathcal{S}$为凸性的，$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$为此集合中

● 数学基础较差的读者可略去此节不读。

的点，如果

$$f(\boldsymbol{X}_3) \geqq \min[f(\boldsymbol{X}_1),\ f(\boldsymbol{X}_2)] \qquad (2.2.3)$$

对于每一属于$\mathscr{S}$的 $\boldsymbol{X}$ 成立，则函数 $f(\boldsymbol{X})$ 是**准凹函数**。若上式为严格不等式，则 $f(\boldsymbol{X})$ 为**严格准凹函数**。

对于我们讨论的效用最大化问题而言，集合的凸性就是无差异曲线如何划分 $x_1$-$x_2$ 平面的问题。图 2.4 中的点 $\boldsymbol{X}_1=(x_{11},\ x_{12})'$ 和点 $\boldsymbol{X}_2=(x_{21},\ x_{22})'$ 的联线上有一点 $\boldsymbol{X}_3=(x_{31},\ x_{32})'$。式 (2.2.2) 中用 $(1-a)$ 和 $a$ 将 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 加权平均就相当于求点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的联线上的点 $\boldsymbol{X}_3$。凸性集合的定义意味着集合中的点之联线上的点仍在集合中。若有效用函数 $U(\boldsymbol{X})$，则满足 $U(\boldsymbol{X}) \geqslant U_0$ 的所有点 $\boldsymbol{X}_i$(即所有消费方案) 构成一个集合，若这个集合中的点 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 满足 $U(\boldsymbol{X}_1) \geqslant U_0$，$U(\boldsymbol{X}_2) \geqslant U_0$，这两点联线上的点

$$\boldsymbol{X}_3=(1-a)\boldsymbol{X}_1+a\boldsymbol{X}_2$$

也满足 $U(\boldsymbol{X}_3) \geqslant U_0$，则消费方案集合 $\boldsymbol{X}$ 是凸的。从图中可以看到商品消费方案集合的凸性意味着无差异曲线向原点凸出。如果无差异曲线如图 2.5 所示，则商品消费方案集合就不是凸的而是凹的。这时点 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 联线上的点 $\boldsymbol{X}_3$ 就不一定在满足 $U(\boldsymbol{X}) \geqslant U_0$ 的 $\boldsymbol{X}$ 集合中。

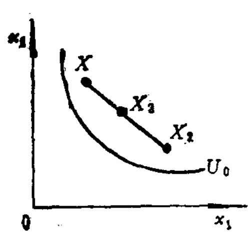



图 2.4

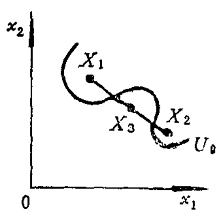



图 2.5

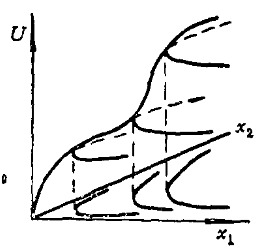



图 2.6

效用函数的严格准凹性意味着效用曲面是向下准凹的。比较图 2.2 和图 2.6 可以从直观上理解凹性和准凹性的差别。图 2.2 中的效用函数是凹性的，而图 2.6 中的效用函数是准凹性的。凹性意味着效用函数的二阶导数恒小于 0，即边际效用递减，而准凹性意味着效用函数的二阶导数可以不小于 0。

消费方案集合之凸性与效用函数的严格准凹性之间的关系由下列定理给出。

**定理 1** 设所有 $\boldsymbol{X}$ 中的一部分构成函数 $U(\boldsymbol{X})$ 在水准 $U_0$ 的水准集合 $\mathscr{S}$，使得

$$U(\boldsymbol{X}) \geqq U_0 \tag{2.2.4}$$

则只有当函数 $U(\boldsymbol{X})$ 为准凹性时，$\mathscr{S}$ 才是凸的。

**证明** （1）必要条件

令 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2 \in \mathscr{S}$，同时令

$$U_0 = \min[U(\boldsymbol{X}_1), U(\boldsymbol{X}_2)] \tag{2.2.5}$$

若 $\mathscr{S}$ 为凸的，则 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的凸性组合

$$\boldsymbol{X}_3 = (1-a)\boldsymbol{X}_1 + a\boldsymbol{X}_2, \quad 0 < a < 1, \tag{2.2.6}$$

亦属于 $\mathscr{S}$，所以

$$U(\boldsymbol{X}_3) \geqq U_0 \tag{2.2.7}$$

根据式（2.2.5）和式（2.2.7）两式，$U$ 为准凹性的。

（2）充分条件

令 $\mathscr{S}$ 是使 $U(\boldsymbol{X}) \geqq U_0$ 之 $\boldsymbol{X}$ 的集合，若 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2 \in \mathscr{S}$，则

$$U(\boldsymbol{X}_1) \geqq U_0, \quad U(\boldsymbol{X}_2) \geqq U_0 \tag{2.2.8}$$

由于 $U(\boldsymbol{X})$ 为准凹函数，所以

$$U(\boldsymbol{X}_3) \geqq U_0,$$

所以
$$\boldsymbol{X}_3 \in \mathscr{S},$$

所以 $\mathscr{S}$ 为凸性的。

Gossen 假定效用函数之二阶导数恒小于 0，这就是边际效用递减，即 Gossen 第一法则。这个假定意味着效用函数不但具有严格准凹性，而且具有严格凹性。函数的凹性的定义如下。

**定义 3** 只有当下式成立时，函数 $U(\boldsymbol{X})$ 才是凹性的：

$$U[(1-a)\boldsymbol{X}_1+a\boldsymbol{X}_2]\geqq(1-a)U(\boldsymbol{X}_1)+aU(\boldsymbol{X}_2) \tag{2.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 为凸集合中的任意两点，且 $0<a<1$。若上式为严格不等式，则函数 $U(\boldsymbol{X})$ 为严格凹的。

函数凹性意味着 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的函数值 $U(\boldsymbol{X}_1)$，$U(\boldsymbol{X}_2)$ 用 $(1-a)$ 和 $a$ 加权平均得到的线性插值不大于 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 的加权平均值的函数值。这个定义的几何意义如图 2.7 所示。图 2.8 是严格准凹函数定义的图示。图 2.8 中的函数满足 $U(\boldsymbol{X}_3)>\min[U(\boldsymbol{X}_1),\ U(\boldsymbol{X}_2)]$，但在某些区域不满足 $U(\boldsymbol{X}_3)>(1-a)U(\boldsymbol{X}_1)+aU(\boldsymbol{X}_2)$，其中 $\boldsymbol{X}_3=(1-a)\boldsymbol{X}_1+a\boldsymbol{X}_2$。

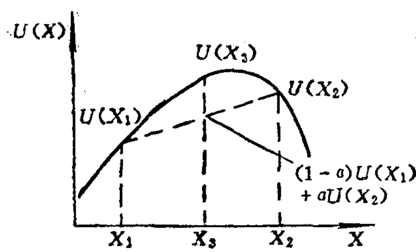



图 2.7

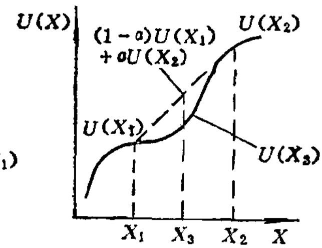



图 2.8

显然凹性函数存在极大值，因为其函数的斜率是递减的。但是准凹函数只有在约束

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2=0 \tag{2.2.10}$$

之下才有极大值，因为在满足这一约束的区域，函数是凹的。

凹性函数必是准凹函数，但反过来准凹函数却不满足凹性条件。

现代数理经济学放弃了效用函数为凹性函数，即边际效用递减的假定，而假定效用函数为准凹函数。

函数满足严格凹性的充要条件由下列两定理给出。

**定理 2**　假定 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 都属于凸性集合，只有当下式成立时，可微函数 $U(\boldsymbol{X})$ 才是严格凹性的：

$$U(\boldsymbol{X}_2)-U(\boldsymbol{X}_1)<\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1] \qquad (2.2.11)$$

其中 $\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_1$ 都是 $n$ 维向量，$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}=\left[\frac{\partial U}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}\right]'$ 为 $n$ 维列向量。

现给出必要条件的证明：

由于

$$(1-a)\boldsymbol{X}_1+a\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_1+a(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1) \qquad (2.2.12)$$

且

$$(1-a)U(\boldsymbol{X}_1)+aU(\boldsymbol{X}_2)=U(\boldsymbol{X}_1)+a[U(\boldsymbol{X}_2)-U(\boldsymbol{X}_1)] \qquad (2.2.13)$$

若 $U$ 为严格凹的，则

$$U[\boldsymbol{X}_1+a(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1)]>U(\boldsymbol{X}_1)+a[U(\boldsymbol{X}_2)-U(\boldsymbol{X}_1)] \qquad (2.2.14)$$

利用泰勒无穷级数展开式 $U(a+h)=U(a)+U'(a)h+\frac{1}{2!}U''(a)h^2+\cdots$，

上式左边可展成一阶近似式

$$U(\boldsymbol{X}_1)+a\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1] \qquad (2.2.15)$$

式中偏导数是在 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 之间取值的。

将 (2.2.15) 代替 (2.2.14) 左边，则

$$U(\boldsymbol{X}_1)+a\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1]>U(\boldsymbol{X}_1)$$
$$+a[U(\boldsymbol{X}_2)-U(\boldsymbol{X}_1)]$$

因 $a$ 为一正数，故

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot[\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1]>U(\boldsymbol{X}_2)-U(\boldsymbol{X}_1) \quad (2.2.16)$$

这就证明了式 (2.2.11)。

**定理 3** 只有当 $U(\boldsymbol{X})$ 的 Hessin 矩阵是负定时，可微函数 $U(\boldsymbol{X})$ 才是严格凹性的。

Hessin 矩阵定义为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nn} \end{bmatrix}, \quad 其中\ U_{ij}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.2.17)$$

上述定理之必要条件可证明如下：

利用泰勒级数展开式，$U(\boldsymbol{X})$ 之二阶近似式可写为

$$U(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V})=U(\boldsymbol{X})+\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V} \quad (2.2.18)$$

式中的偏导数在 $\boldsymbol{X}$ 点取值。$U$ 的 Hessin 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是在 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V}$ 之间取值的，于是我们有

$$U(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V})-U(\boldsymbol{X})-\left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}}\right]'\cdot\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{V} \quad (2.2.19)$$

根据式 (2.2.11)，上式左边为负，因此右边的二次式负定，$\boldsymbol{H}$ 矩阵负定。根据定理 2，当式 (2.2.11) 成立，则

函数为严格凹的，所以 $\boldsymbol{H}$ 矩阵负定时，函数为严格凹性。

由于 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$，所以 Hessin 矩阵是对称的。Hessin矩阵各阶行列式符号负正相间时，矩阵为**负定**，即

$$|U_{11}|<0, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}<0, \cdots \tag{2.2.20}$$

若上式中的不等号加上等号，则 Hessin 矩阵**半负定**。

对于任一向量 $\boldsymbol{V}$，二次式 $\boldsymbol{V'HV}$ 之值恒小于 0 与 $\boldsymbol{H}$ 矩阵的负定之间的等价关系，我们可以用最简单的二元函数 $U(x_1, x_2)$ 为例加以证明。

设有二次式

$$U_{11}v_1^2+2U_{12}v_1v_2+U_{22}v_2^2 \tag{2.2.21}$$

它可以化为

$$U_{11}v_1^2+2U_{12}v_1v_2+\frac{U_{12}^2}{U_{11}}v_2^2+U_{22}v_2^2-\frac{U_{12}^2}{U_{11}}v_2^2$$

$$=U_{11}\left(v_1+\frac{U_{12}}{U_{11}}v_2\right)^2+\frac{U_{11}U_{22}-U_{12}^2}{U_{11}}v_2^2$$

即通过配平方，可以将一般的二次式变换成完全平方和的形式，这时二次式的符号由 $U_{11}$ 和 $\frac{U_{11}U_{22}-U_{12}^2}{U_{11}}$ 确定。当 $U_{11}<0$，$U_{11}U_{22}-U_{12}^2>0$ 时，二次式（2.2.21）之值小于0，而 $U_{11}$ 正是函数 $U(x_1, x_2)$ 的 Hessin 矩阵一阶行列式之值，而 $U_{11}U_{22}-U_{12}^2$ 正是 Hessin 矩阵二阶行列式 $\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12} & U_{22} \end{vmatrix}$ 之值。以上推导可推广到

$$X=(x_1,\ \cdots,\ x_n)',$$
$$U=U(X) \tag{2.2.22}$$

的情形。即我们可以通过满秩变换将二次式$V'HV$变为完全平方和的形式$V'KV$，其中$K$矩阵只有对角线元素不为0。令$H_1$，$H_2$，…，$H_n$为Hessin矩阵之各阶子矩阵，则不难证明

$$V'HV=|H_1|(\cdot)^2+\frac{|H_2|}{|H_1|}(\cdot)^2+\frac{|H_3|}{|H_2|}(\cdot)^2+\cdots+\frac{|H_n|}{|H_{n-1}|}(\cdot)^2 \tag{2.2.23}$$

所以二次式$V'HV$负定的条件是$H$矩阵各阶行列式之值负正相间，这就是$H$矩阵负定。

函数$U(X)$满足严格准凹性的条件是函数之Hessin矩阵在约束$dU=\left[\frac{\partial U}{\partial X}\right]'\cdot[dX]=0$之下负定。从图2.8可看出严格准凹函数只有在$dU=0$的附近才是凹的。而在某些区域，例如在$X_3$附近，函数不是凹的。

为了导出Hessin矩阵在一般约束$B'X=0$之下负定的条件，我们来证明下述二次式定理。

**定理4** 设二次式$X'AX$在约束条件

$$B'X=0 \tag{2.2.24}$$

下是负定的，其中$A$为$n\times n$对称常数矩阵，$B$为$n$维常数列向量。令

$$H=\begin{bmatrix}A & B\\ B' & 0\end{bmatrix} \tag{2.2.25}$$

则二次式

$$Z'HZ=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|H_{ij}|}{|H|}z_iz_j \qquad (2.2.26)$$

为负定的。其中 $|H_{ij}|$ 为矩阵 $H$之元素之余子式，因此$H$矩阵亦为负定的。

**证明** 设

$$R=X'AX+2\alpha B'X \qquad (2.2.27)$$

其中 $\alpha$ 为常数，$R$也是一个常数。由于$X'AX$负定，且$B'X=0$，所以$R$亦为负数。稍作变换，$R$可写为

$$R=Y'HY \qquad (2.2.28)$$

其中

$$Y=\begin{pmatrix}X\\ \alpha\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}A & B\\ B' & 0\end{pmatrix} \qquad (2.2.29)$$

设有一个新向量

$$Z=HY=\begin{pmatrix}A & B\\ B' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AX+\alpha B\\ B'X\end{pmatrix} \qquad (2.2.30)$$

$Z$ 为$n+1$维向量，其中第$n+1$个元素为

$$(B'\ \ 0)\begin{pmatrix}X\\ \alpha\end{pmatrix}=B'X=0 \qquad (2.2.31)$$

从 $Z=HY$得

$$Y=H^{-1}Z \qquad (2.2.32)$$

根据（2.2.28）式，注意到$H$为对称矩阵，我们有

$$R=Y'HY=Z'(H^{-1})HH^{-1}Z$$
$$=Z'H^{-1}Z<0 \qquad (2.2.33)$$

根据线性代数，若$X'AX$为负定，则$X'(-A)X$是正定的，而$X'A^{-1}X$仍是负定的，所以$Z'HZ$是负定的，即$H$为负定的。

我们把

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}' & 0\end{pmatrix} \tag{2.2.34}$$

定义为**滚边Hessin矩阵**。例如效用函数$U(x_1, x_2, x_3)$ 在约束 $dU=U_1dx_1+U_2dx_2+U_3dx_3=0\left(\text{其中}U_i=\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\right)$下负定，则用约束条件中的$U_1, U_2, U_3$滚边之 Hessin 矩阵

$$\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_1\\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_2\\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_3\\ U_1 & U_2 & U_3 & 0\end{pmatrix} \tag{2.2.35}$$

负定。滚边Hessin矩阵负定意味着从滚边矩阵的三阶行列式开始，各阶行列式之值正负相间，即

$$\begin{vmatrix}U_{11} & U_{12} & U_1\\ U_{21} & U_{22} & U_2\\ U_1 & U_2 & 0\end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix}U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_1\\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_2\\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_3\\ U_1 & U_2 & U_3 & 0\end{vmatrix}<0。 \tag{2.2.36}$$

这就是效用函数严格准凹性的条件，亦是效用函数极大化之二阶条件。

对于效用函数$U(\boldsymbol{X})$，我们可以在$X^*$将其展成泰勒级数

$$U(\boldsymbol{X})-U(\boldsymbol{X}^*)=dU(\boldsymbol{X}^*)+\frac{1}{2!}d^2U(\boldsymbol{X}^*)+\frac{1}{3!}d^3U(\boldsymbol{X}^*)+\cdots \tag{2.2.37}$$

其中 $$dU(\boldsymbol{X}^*)=\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n$$

令 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}=U_{ij}$，$[d\boldsymbol{X}]=[dx_1, \cdots, dx_n]'$，则

$$d^2U(X^*)=[dX]'\begin{bmatrix}U_{11}\cdots U_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ U_{n1}\cdots U_{nn}\end{bmatrix}[dX] \qquad (2.2.38)$$

$U(X)$取极值的一阶条件为

$$dU(X^*)=0 \qquad (2.2.39)$$

由于

$$dU(X^*)=\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n$$

$$(2.2.40)$$

对于可取任意不为 0 的$dx_1$, …, $dx_n$, 可正可负, 所以一阶全微分$dU(X^*)=0$ 意味着所有的

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}=0, \quad i=1, \cdots, n \qquad (2.2.41)$$

$U(X^*)$ 为极大值的充分条件为

$$U(X)-U(X^*)<0 \qquad (2.2.42)$$

由于 $dU(X^*)=0$

所以式 (2.2.42) 意味着

$$d^2U(X^*)<0 \qquad (2.2.43)$$

即下列二次式小于 0：

$$[dX]'[H][dX]<0 \qquad (2.2.44)$$

其中

$$[H]=\begin{bmatrix}U_{11}\cdots U_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ U_{n1}\cdots U_{nn}\end{bmatrix}$$

为Hessin矩阵。式(2.2.44)意味着Hessin矩阵$H$负定。可见函数$U(X)$取极大值的二阶条件为函数之 Hessin 矩阵负定。

如果函数$U(X)$为严格准凹的，则函数在$dU=U_1dx_1+$

$\cdots+U_n dx_n=0$ 约束下为凹的（见图2.8），所以Hessin矩阵在约束 $dU=0$ 下负定为函数取极大值的二阶条件。根据定理3可证函数$U(\mathbf{X})$取极大值的二阶条件为函数之滚边Hessin矩阵（2.2.35）负定。

根据二次式定理，我们也可推出效用函数

$$U(x_1, x_2, x_3) \tag{2.2.45}$$

在预算约束　　$M-p_1x_1-p_2x_2-p_3x_3=0$

之下最大化的二阶条件是$U(x_1,\ x_2,\ x_3)$的Hessin矩阵用约束条件变量系数$-p_1$, $-p_2$, $-p_3$滚边之Hessin矩阵负定，即

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & -p_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0。 \tag{2.2.46}$$

函数极小化的二阶条件正好相反，即要求滚边Hessin矩阵正定。例如有函数

$$y=f(x_1, x_2, x_3) \tag{2.2.47}$$

极小化的二阶条件为滚边Hessin矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.48}$$

正定，即滚边Hessin矩阵从三阶行列式开始，各阶行列式都

小于0：

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{2.2.49}$$

若要求

$$y = f(x_1, x_2, x_3)$$

在约束 $$b_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 = 0 \tag{2.2.50}$$

之下最小化，则二阶条件为滚边Hessin矩阵

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -b_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & -b_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & -b_2 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

正定，即

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -b_1 \\ f_{21} & f_{22} & -b_2 \\ -b_1 & -b_2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -b_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & -b_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & -b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{2.2.51}$$

**最优经济效果问题的二阶条件之经济意义是什么呢？以求效用函数$U(x_1, x_2)$最大化的问题来说，其二阶条件为滚边Hessin矩阵**

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_2 \\ U_1 & U_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.52}$$

负定，这意味着

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_2 \\ U_1 & U_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.2.53}$$

展开此式，则有

$$U_{11}U_2^2 + U_{22}U_1^2 - 2U_1U_2U_{12} < 0 \tag{2.2.54}$$

其经济意义就是商品之边际替代率

$$s = -\frac{dx_2}{dx_1}$$

递减。$s$ 递减意味着

$$\frac{ds}{dx_1} < 0$$

因为

$$s = -\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1}{U_2},$$

所以

$$\frac{ds}{dx_1} = \frac{U_2\left(U_{11} + U_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right) - U_1\left(U_{22}\frac{dx_2}{dx_1} + U_{21}\right)}{U_2^2}$$

$$= \frac{U_2\left(U_{11} - U_{12}\frac{U_1}{U_2}\right) - U_1\left(U_{21} - U_{22}\frac{U_1}{U_2}\right)}{U_2^2}$$

$$= \frac{U_2^2U_{11} - 2U_1U_2U_{12} + U_1^2U_{22}}{U_2^3} \tag{2.2.55}$$

以上推导中利用了$U_{12}=U_{21}$，并利用了复合函数求导法则和隐函数求导法则。由于效用函数是渐增函数，所以$U_1>0$，$U_2>0$，$U_2^3>0$。根据式（2.2.54），式（2.2.55）之分子小于0、所以

$$\frac{ds}{dx_1}<0 \tag{2.2.56}$$

从以上推导易知，边际效用递减，即$U_{11}<0$，$U_{22}<0$并不是消费者最优经济效果的必要条件，效用函数最大化的二阶条件是商品之边际替代率$s$递减。这意味着某种商品消费得越多，此种商品替代其它商品的边际能力越低。也就是说人们普遍倾向于多样化的消费结构，而不喜欢集中消费很多单一商品。

效用函数$U(x_1,x_2)$在约束$M-p_1x_1-p_2x_2=0$下最大化的二阶条件是滚边Hessin矩阵负定，即

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}>0 \tag{2.2.57}$$

其展开式为

$$2U_{12}p_1p_2-U_{22}p_1^2-U_{11}p_2^2>0 \tag{2.2.58}$$

由于最优化的必要条件为边际替代率等于价格比，即

$$s=\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2},\ \text{即}\ p_1=\frac{U_1}{U_2}p_2 \tag{2.2.59}$$

代入式（2.2.58），整理后得到

$$U_{11}U_2^2+U_{22}U_1^2-2U_{12}U_1U_2<0 \tag{2.2.60}$$

这与式（2.2.54）毫无二致，即上式意味着边际替代率$s$递减。所以约束最大化的条件等价于效用函数严格准凹性的条件。

由于下节我们将证明需求函数是由效用函数导出，则本节导出的效用函数的严格准凹性对于证明需求函数的各种特性非常有用。

## §2.3 消费者最优经济效果的实证分析

由于效用函数的不唯一，所以实际直接测度效用函数是非常困难的，但是我们可以利用需求函数来间接研究效用函数的特性。例如设有 Cobb-Douglas 型效用函数（它满足效用函数存在定理）

$$U=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \tag{2.3.1}$$

预算约束为

$$p_1x_1+p_2x_2=M \tag{2.3.2}$$

其中$x_1$，$x_2$ 为两种商品的消费量，$p_1$，$p_2$为相应的价格，$M$为收入。根据式（2.1.15），效用最大化的必要条件为

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{p_1}{p_2} \tag{2.3.3}$$

即

$$\frac{\alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$p_2x_2=\frac{\beta}{\alpha}p_1x_1 \tag{2.3.4}$$

代入式（2.3.2），则

$$p_1x_1+\frac{\beta}{\alpha}p_1x_1=M$$

$$x_1^*=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ \frac{M}{p_1} \tag{2.3.5}$$

代入式（2.3.4）得到

$$x_2^*=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\ \frac{M}{p_2} \tag{2.3.6}$$

式（2.3.5）和式（2.3.6）就是需求函数，即给定收入$M$和价格$p_1$，$p_2$，消费者使效用最大化的需求量$x_1^*$，$x_2^*$就确定了，当收入$M$和价格$p_1$，$p_2$变化时，最优需求量亦随之变化。从Cobb-Douglas型效用函数推出的需求函数就是著名的线性支出系统（LES）。自斯通以来，很多人用线性支出系统作为模型结构估计了各国的需求系统，做出的经济计量模型与实际数据拟合得较好。

令$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=a$，$\frac{\beta}{\alpha+\beta}=b$，则式（2.3.5)和式(2.3.6)可改写为

$$p_1x_1^*=aM \qquad (2.3.5')$$

$$p_2x_2^*=bM \qquad (2.3.6')$$

也就是说用来购买某种商品的金额$p_ix_i^*$是总消费支出$M$的线性函数。这就是线性支出系统名称的由来。如果将总支出金额$M$与某种商品的消费额$p_ix_i$回归，可以得到两个参数，所以实际做模型是式（2.3.5′），式（2.3.6′)的变形。设各种商品的价格为$p_i$，共有$n$种商品，则总支出金额

$$M=\sum_{j=1}^{n}p_jx_j$$

于是线性支出系统的变形为

$$p_ix_i=\beta_i\sum_{j=1}^{n}p_jx_j+\alpha_i \qquad (2.3.7)$$

其中$\alpha_i$，$\beta_i$为两个待估计的参数。将上式对$i$求和，则

$$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{n}p_jx_j+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \qquad (2.3.8)$$

上式中 $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$，所以用待定系数法，可以判断式(2.3.7) 的等号成立的条件为

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \qquad (2.3.9)$$

如果有 3 种商品，则式 (2.3.7) 可写为

$$\begin{aligned} p_1x_1 &= \beta_1(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)+\alpha_1 \\ p_2x_2 &= \beta_2(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)+\alpha_2 \\ p_3x_3 &= \beta_3(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)+\alpha_3 \end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

将上式的每个方程合并同类项，整理后可得：

$$\begin{aligned} (1-\beta_1)p_1x_1-\beta_1p_2x_2-\beta_1p_3x_3 &= \alpha_1 \\ -\beta_2p_1x_1+(1-\beta_2)p_2x_2-\beta_2p_3x_3 &= \alpha_2 \\ -\beta_3p_1x_1-\beta_3p_2x_2+(1-\beta_3)p_3x_3 &= \alpha_3 \end{aligned} \qquad (2.3.11)$$

由于$\beta_1+\beta_2+\beta_3=1$，所以$\beta_3=1-\beta_1-\beta_2$，即第 3 个方程所有变量的系数都可以从前面两个方程推出，也就是说这 3 个方程线性相关，有一个方程是多余的。我们去掉第 1 个方程，整理后得，

$$\begin{aligned} (1-\beta_2)p_2x_2-\beta_2p_3x_3 &= \alpha_2+\beta_2p_1x_1 \\ -\beta_3p_2x_2+(1-\beta_3)p_3x_3 &= \alpha_3+\beta_3p_1x_1 \end{aligned} \qquad (2.3.12)$$

令$x_1$为标准商品，其价格$p_1=1$，则$p_2$，$p_3$ 为另两种商品与$x_1$的相对价格，即 $x_2$，$x_3$ 实际价格与$x_1$实际价格的比率。于是式 (2.3.12) 可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} (1-\beta_2)p_2 & -\beta_2p_3 \\ -\beta_3p_2 & (1-\beta_3)p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}x_1 \qquad (2.3.13)$$

从中可解出需求系统

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\beta_2)p_2 & -\beta_2 p_3 \\ -\beta_3 p_2 & (1-\beta_3)p_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\beta_2)p_2 & -\beta_2 p_3 \\ -\beta_3 p_2 & (1-\beta_3)p_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} x_1 \tag{2.3.14}$$

这是数字式需求系统，只要给定相对价格和标准商品消费量 $x_1$，则可算出所有其它商品的需求量。相对价格变化，则所有需求量都会变化。反过来，给定三种商品的需求量，则可解出相对价格 $p_2$、$p_3$。以上推导不难推广到有 $n$ 种商品的情形。

**例** 湖北省大中城市1982年 9 大类商品的简单线性支出系统如下所示，其中 $p_i x_i$ 为人均每月用于购买 $i$ 类商品金额，$M$ 为人均月收入，

食品 $p_1x_1 = 4.0649 + 0.4758M$

穿着 $p_2x_2 = -1.1667 + 0.1552M$

日用品 $p_3x_3 = -0.7315 + 0.1182M$

文娱品 $p_4x_4 = -0.3420 + 0.0632M$

书报 $p_5x_5 = -0.7430 + 0.0679M$

燃料 $p_6x_6 = 0.1258 + 0.0118M$

其它商品 $p_7x_7 = -0.6274 + 0.0334M$

医药支出 $p_8x_8 = -0.8707 + 0.0073M$

非商品支出 $p_9x_9 = 0.3106 + 0.0672M$

令 $p_1 = 1$，$M = \sum_{i=1}^{9} p_i x_i$，且去掉第 1 个函数，则从上式我们不难导出类似式（2.3.14）的数字式需求函数，即

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}x_1$$

其中 $X=(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)'$

$A=(-1.1667, -0.7315, -0.342, -0.743, 0.1258, -0.6274, -0.8707, 0.3106)'$

$B=(0.1552, 0.1182, 0.0632, 0.0679, 0.0118, 0.0334, 0.0073, 0.0672)'$

斜撇“′”表示向量转置，即上述3个向量都是列向量，本应竖写，篇幅限制，所以用行向量的转置表示。

$$P=\begin{pmatrix}
(1-0.1552)p_2 & -0.1552p_3 & -0.1552p_4 & -0.1552p_5 & -0.1552p_6 & -0.1552p_7 & -0.1552p_8 & -0.1552p_9 \\
-0.1182p_2 & (1-0.1182)p_3 & -0.1182p_4 & -0.1182p_5 & -0.1182p_6 & -0.1182p_7 & -0.1182p_8 & -0.1182p_9 \\
-0.0632p_2 & -0.0632p_3 & (1-0.0632)p_4 & -0.0632p_5 & -0.0632p_6 & -0.0632p_7 & -0.0632p_8 & -0.0632p_9 \\
-0.0679p_2 & -0.0679p_3 & -0.0679p_4 & (1-0.0679)p_5 & -0.0679p_6 & -0.0679p_7 & -0.0679p_8 & -0.0679p_9 \\
-0.0118p_2 & -0.0118p_3 & -0.0118p_4 & -0.0118p_5 & (1-0.0118)p_6 & -0.0118p_7 & -0.0118p_8 & -0.0118p_9 \\
-0.0334p_2 & -0.0334p_3 & -0.0334p_4 & -0.0334p_5 & -0.0334p_6 & (1-0.0334)p_7 & -0.0334p_8 & -0.0334p_9 \\
-0.0073p_2 & -0.0073p_3 & -0.0073p_4 & -0.0073p_5 & -0.0073p_6 & -0.0073p_7 & (1-0.0073)p_8 & -0.0073p_9 \\
-0.0672p_2 & -0.0672p_3 & -0.0672p_4 & -0.0672p_5 & -0.0672p_6 & -0.0672p_7 & -0.0672p_8 & (1-0.0672)p_9
\end{pmatrix}$$

这种简单的线性支出系统只能是对实际需求系统的近似，式（2.3.5）与式（2.3.6）那样的需求函数中，$i$ 商品需求量对其它商品价格的弹性为0，而式（2.3.14）那样的

需求函数中，自变量中没有收入$M$。这显然与实际情况相去甚远。斯通将 Cobb-Douglas 型效用函数稍作变换，推出了另一种较复杂的线性支出系统。今天广为应用的LES实际上是指这种较复杂的模型，而不是前述简单的支出系统。

设效用函数为

$$V=A(x_1-\bar{x}_1)^{a_1}(x_2-\bar{x}_2)^{a_2} \tag{2.3.15}$$

其中$A$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$a_1$，$a_2$为参数，参数比式（2.3.1）中的多，这样推出的需求函数便于进行含较多自变量的估计。由于对效用函数作单调渐增变换得到的函数仍为效用函数，所以我们可以稍作变换，令新的效用函数为

$$\begin{aligned} U&=\ln V-\ln A \\ &=a_1\ln(x_1-\bar{x}_1)+a_2\ln(x_2-\bar{x}_2) \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

消费者的问题是在下列预算约束下使上述效用函数极大化：

$$p_1x_1+p_2x_2=M \tag{2.3.17}$$

根据（2.1.14），最优化的必要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

即

$$\frac{\dfrac{a_1}{x_1-\bar{x}_1}}{\dfrac{a_2}{x_2-\bar{x}_2}}=\frac{p_1}{p_2} \tag{2.3.18}$$

从中可解出

$$p_1x_1=p_1\bar{x}_1+\frac{a_2}{a_1}p_2\left(\frac{M-p_1x_1}{p_2}-\bar{x}_2\right)$$

$$=p_1\bar{x}_1+\frac{a_2}{a_1}\{M-[p_1(x_1-\bar{x}_1)+p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2]\}$$

即

$$\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)p_1x_1=\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)p_1\bar{x}_1$$

$$+\frac{a_2}{a_1}[M-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)]$$

$$p_1x_1=p_1\bar{x}_1+\beta_1[M-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)] \qquad (2.3.19)$$

其中$\beta_1=\dfrac{a_2}{a_1+a_2}$，$\beta_1$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 都是待估参数。参数 $\bar{x}_i$ 可解释为维持起码生活水平时对 $i$ 种商品的需求量。所以$(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)$表示维持起码生活水平购买各种商品的总支出，简称**起码生活水平支出**，用$S$表示。

$$M-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)$$

叫维持起码生活水平之外的**额外支出**。

将（2.3.19）式代回（2.3.17）式，可解出

$$p_2x_2=p_2\bar{x}_2+\beta_2[M-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)] \qquad (2.3.20)$$

其中　　$\beta_2=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}$。

以上推导可以推广到$n$种商品的情形。于是我们有从Cobb-Douglas型效用函数导出的一般线性支出系统：

$$p_ix_i=p_i\bar{x}_i+\beta_i(M-S),\quad i=1,\cdots,n \qquad (2.3.21)$$

其中

$$S=\sum_{j=1}^{n}p_j\bar{x}_j$$

回顾（2.1.15），收入的影子价格

$$\lambda=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2} \qquad (2.3.22)$$

收入的影子价格 λ 对收入$M$的弹性为

$$\frac{\partial\lambda}{\partial M}\ \frac{M}{\lambda}=\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial M}\ \frac{M}{\lambda} \qquad (2.3.23)$$

$\frac{\partial\lambda}{\partial M}$一般小于 0，即收入增加，收入的边际效用递减。而 λ 对$M$之弹性说明收入增加 1 %，收入的边际效用减少百分之几。它叫 Frisch 参数，由 Frisch 在其〔1959〕文献中提出。对于 Cobb-Douglas 型效用函数导出的线性支出系统式(2.3.21)，Frisch参数为

$$\phi=\frac{-M}{M-S}=\frac{\partial\lambda}{\partial M}\ \frac{M}{\lambda} \qquad (2.3.24)$$

其中$S$为起码生活水平支出，$M-S$为额外支出，$M$为收入。为证明（2.3.24）式，我们先从式（2.3.16）和式(2.3.22) 导出

$$\lambda=\frac{a_1}{p_1(x_1-\bar{x}_1)}=\frac{a_2}{p_2(x_2-\bar{x}_2)} \qquad (2.3.25)$$

从式（2.3.19）又可导出

$$x_1=\bar{x}_1+\frac{\beta_1}{p_1}(M-p_1\bar{x}_1-p_2\bar{x}_2) \qquad (2.3.26)$$

所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial M}=\frac{\beta_1}{p_1}$$

且

$$\beta_1=\frac{p_1(x_1-\bar{x}_1)}{M-S}$$

所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial M}=\frac{x_1-\bar{x}_1}{M-S} \tag{2.3.27}$$

所以

$$\frac{\partial\lambda}{\partial M}=\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\ \frac{\partial x_1}{\partial M}=\frac{-a_1(x_1-\bar{x}_1)}{p_1(x_1-\bar{x}_1)^2(M-S)}$$

$$=\frac{-a_1}{p_1(x_1-\bar{x}_1)(M-S)} \tag{2.3.28}$$

所以

$$\frac{\partial\lambda}{\partial M}\ \frac{M}{\lambda}=\frac{-a_1 M p_1(x_1-\bar{x}_1)}{p_1(x_1-\bar{x}_1)(M-S)a_1}=\frac{-M}{M-S}=\phi \tag{2.3.29}$$

这就证明了式（2.3.24）。以上证明不难推广到 $n$ 种商品的情形。Lluch，Powell和 Williams〔1977〕，Chenery〔1975〕，〔1979〕文献给出了人均收入为不同值时的 $\phi$ 值。这些文献报告人均收入在 100～3000 美元（1970 年美元）时，$\phi$ 值在 $-7.5$～$-2.0$之间。

已知Frisch参数 $\phi$ 后就可算得各种商品的起码生活水平消费量$\bar{x}_i$（$i=1,\cdots,n$）。从式（2.3.24）可导出

$$S=M\left(1+\frac{1}{\phi}\right) \tag{2.3.30}$$

又根据式（2.3.21）和式（2.3.30）我们有

$$p_i x_i=p_i\bar{x}_i+\beta_i\left(-\frac{M}{\phi}\right) \tag{2.3.31}$$

从中可解出

$$\bar{x}_i=\frac{M}{p_i}\left(\frac{p_i\ x_i}{M}+\frac{\beta_i}{\phi}\right)$$

其中$\frac{p_i\ x_i}{M}$为 $i$ 商品消费金额占收入$M$之比重，若记其为

$$\alpha_i=\frac{p_i x_i}{M}$$

则前式可写为

$$\bar{x}_i=\frac{M}{p_i}\left(\alpha_i+\frac{\beta_i}{\phi}\right) \qquad (2.3.32)$$

$\beta_i$ 的算法如下。设 $i$ 种商品支出金额 $p_i x_i$ 对收入之弹性为

$$\sigma_i=\frac{\partial p_i x_i}{\partial M}\ \frac{M}{p_i x_i},$$

根据式（2.3.21），$i$ 商品边际消费金额比重

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial M}=\beta_i$$

而

$$\frac{p_i x_i}{M}=\alpha_i$$

为 $i$ 商品平均消费金额比重，所以

$$\sigma_i=\frac{\beta_i}{\alpha_i},\quad 即\quad \beta_i=\sigma_i\alpha_i \qquad (2.3.33)$$

利用家计调查的横断面资料，假定某一时刻价格不变，则很容易将收入与 $i$ 商品的消费金额进行回归，做出经济计量模型，然后算出$\sigma_i$。

将式（2.3.21）对 $i$ 求和，则

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(M-\sum_{j=1}^{n} p_j\bar{x}_j\right)$$

由于$M=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$，上式可改写为

$$M-\sum_{i=1}^{n} p_i\bar{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i M-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sum_{j=1}^{n} p_j\bar{x}_j$$

上式成立的条件为

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \tag{2.3.34}$$

将式（2.3.33）代入上式，则

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_i = 1 \tag{2.3.35}$$

这就是著名的恩格尔总量条件，即 $i$ 商品消费金额之收入弹性用平均消费金额比重加权平均等于 1 。

已知Frisch参数 $\phi$，收入弹性 $\sigma_i$，我们可以算出LES的价格弹性。

例如，若有两种商品，则式（2.3.21）可写为

$$p_1 x_1 = p_1 \bar{x}_1 + \beta_1 (M - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) \tag{2.3.36}$$

上式可改写为

$$x_1 = \bar{x}_1 + \frac{\beta_1}{p_1}(M - p_1 \bar{x}_1 - p_2 \bar{x}_2) \tag{2.3.37}$$

将 $x_1$ 对 $p_1$ 求偏导数可得

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-\beta_1}{p_1^2}(M - S) - \frac{\beta_1}{p_1}\bar{x}_1$$

由于 $\phi = \dfrac{-M}{M-S}$，所以

$$(M - S) = \frac{-M}{\phi}$$

所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\beta_1 M}{p_1^2 \phi} - \frac{\beta_1 \bar{x}_1}{p_1}$$

所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} = \frac{\beta_1 M}{p_1 x_1 \phi} - \frac{\beta_1 p_1 \bar{x}_1}{p_1 x_1} \tag{2.3.38}$$

由于$\frac{p_1 x_1}{M}=\alpha_1$，且$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\sigma_1$，所以上式可写为

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\ \frac{p_1}{x_1}=-\sigma_1\left(\frac{\beta_1}{\sigma_1}\ \frac{p_1\bar{x}_1}{p_1 x_1}-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$=-\sigma_1\left(\alpha_1\frac{p_1\bar{x}_1}{p_1 x_1}-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$=-\sigma_1\left(\frac{p_1 x_1}{M}\ \frac{p_1\bar{x}_1}{p_1 x_1}-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$=-\sigma_1\left(\frac{p_1\bar{x}_1}{M}-\frac{1}{\phi}\right) \qquad (2.3.39)$$

一般地，我们有 $i$ 种商品需求之自身价格弹性：

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\ \frac{p_i}{x_i}=-\sigma_i\left(\frac{p_i\bar{x}_i}{M}-\frac{1}{\phi}\right) \qquad (2.3.40)$$

其中 $\sigma_i$ 为 $i$ 商品消费额对总支出$M$的弹性，$\phi$ 为Frisch参数。

将（2.3.37）式对$p_2$求导数，则

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=-\frac{\beta_1}{p_1}\bar{x}_2 \qquad (2.3.41)$$

所以$x_1$对$p_2$的弹性为

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\ \frac{p_2}{x_1}=-\frac{\beta_1 p_2\bar{x}_2}{p_1 x_1} \qquad (2.3.42)$$

由于$\alpha_i=\frac{p_i x_i}{M}$，所以$p_1x_1=\alpha_1 M$，所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\ \frac{p_2}{x_1}=\frac{-\beta_1 p_2\bar{x}_2}{\alpha_1 M}=-\sigma_1\frac{p_2\bar{x}_2}{M} \qquad (2.3.43)$$

一般地，$i$ 商品需求量$x_i$对 $j$ 商品价格$p_j$的交叉弹性为

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\ \frac{p_j}{x_i}=-\sigma_i\frac{p_j\bar{x}_j}{M} \qquad (2.3.44)$$

以上推导不难推广到 $n$ 种商品的情形。

由于我国价格变动较少，所以直接从统计数据做包含价格的需求函数很困难，但从我国的统计数据做需求与收入的经济计量模型很容易。从这种模型很容易算出

$$\beta_i=\frac{\partial p_i x_i}{\partial M},\quad \alpha_i=\frac{p_i\ x_i}{M},\quad \sigma_i=\beta_i/\alpha_i$$

只要通过民政部门或用其它方法算出社会救济中的起码生活水平支出$S$，则利用收入$M$的数据不难算出Frisch参数

$$\phi=\frac{-M}{M-S}$$

于是我们可以将线性支出系数式（2.3.22）的所有参数算出来，并可以利用式（2.3.40）和式（2.3.44）算出所有商品的自身价格弹性和交叉价格弹性。

以上算法在我国非常有用。这种算法是从效用函数和消费者最优经济效果的条件导出的，利用它算出的需求系统亦是分析消费者经济效果的有力工具。

如果效用函数为CES（不变替代弹性的英文缩写）型的，则消费者追求最优经济效果的规律可用“一般化线性支出系统”（GLES）描述。因为Cobb-Douglas型效用函数是CES效用函数之特例，所以LES也是GLES的一个特例。

设 CES 型效用函数为

$$V=r\left[\delta_1\left(\frac{x_1-\bar{x}_1}{\delta_1}\right)^{\rho}+\delta_2\left(\frac{x_2-\bar{x}_2}{\delta_2}\right)^{\rho}\right]^{1/\rho}\quad(2.3.45)$$

其中$\delta_1$，$\delta_2$为分布参数，它们满足$\delta_1+\delta_2=1$。$\delta_i$越大，说明$i$种商品对总效用$V$的影响能力越强。$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$为参数，表示起码生活水平各种商品之必需消费量，$\rho$为替代参数，它决定$x_1$对$x_2$之替代弹性的大小。替代弹性概念我们将在下一章详细介绍。

我们将$V$进行单调渐增变换，令

$$U=\frac{1}{r}V^{\rho} \tag{2.3.46}$$

则 $$U=\delta_1^{(1-\rho)}(x_1-\bar{x}_1)^{\rho}+\delta_2^{(1-\rho)}(x_2-\bar{x}_2)^{\rho} \tag{2.3.47}$$

其中$0<\rho<1$，$x_1$，$x_2$为两种商品的消费量。预算约束为

$$p_1x_1+p_2x_2=M$$

$M$为总支出，$p_1$，$p_2$为两种商品的价格。根据消费者最优经济效果的必要条件式（2.1.17），我们有：

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\delta_1^{1-\rho}(x_1-\bar{x}_1)^{\rho-1}}{\delta_2^{1-\rho}(x_2-\bar{x}_2)^{\rho-1}}=\frac{p_1}{p_2}$$

即

$$\frac{x_1-\bar{x}_1}{x_2-\bar{x}_2}=\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{2.3.48}$$

从预算约束可导出

$$x_2=\frac{M-p_1x_1}{p_2}$$

代入式（2.3.48），整理后可得

$$\frac{p_1(x_1-\bar{x}_1)}{M-[p_1(x_1-\bar{x}_1)+p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2]}=\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\tau} \tag{2.3.49}$$

其中 $$\tau=\frac{\rho}{\rho-1}$$

从式（2.3.49）可解得

$$p_1x_1=p_1\bar{x}_1+\frac{\delta_1p_1^{\tau}}{\delta_1p_1^{\tau}+\delta_2p_2^{\tau}}[M-(p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)] \tag{2.3.50}$$

一般地，我们有 GLES：

$$p_i x_i = p_i \bar{x}_i + \frac{\delta_i p_i^{\tau}}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j p_j^{\tau}} 〔M - S〕, \quad i = 1, \cdots, n$$

(2.3.51)

其中 $S = \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j$，$S$ 为起码生活水平的总支出。

$\sum_{j=1}^{n} \delta_j p_j^{\tau}$ 为一种特殊的价格指数，即把所有的价格分别求 $\tau$ 次方后再加权平均。

LES 的边际消费额比重为不变常数 $\beta_i$，而 GLES 的边际消费额比重为

$$\frac{\partial p_i x_i}{\partial M} = \frac{\delta_i p_i^{\tau}}{P} \qquad (2.3.52)$$

其中 $P = \sum_{j=1}^{n} \delta_j p_j^{\tau}$ 为价格指数。上式是价格的函数而不是常数。当然这比 LES 更符合实际。随着价格的变化，$i$ 商品的边际消费额比重 $\frac{\partial p_i x_i}{\partial M}$ 实际上是会变化的。所以GLES 适用的范围比 LES更广泛。GLES 由 Gamaletsos 于〔1970〕博士论文中提出。他在〔1973〕文献中以 11 个 OECD 成员国的实际模型说明了 GLES 比 LES 更有吸引力。实际上当 $\tau = 0$ 时，式（2.3.51）变成

$$p_i x_i = p_i \bar{x}_i + \delta_i (M - S)$$

令 $\delta_i = \beta_i$，这就是 LES，可见 LES 是 GLES 的一种特殊情况。

**例** 根据1982年湖北省家计调查横断面资料，做出湖北省大中城市3种商品人均月消费额与人均月支出额之间关系的经济计量模型，即恩格尔函数

食品 $p_1x_1=4.0649+0.4758M$

穿着 $p_2x_2=-1.1667+0.1552M$

日用品 $p_3x_3=-0.7315+0.1182M$

将1982年湖北省大中城市人均月支出额 $M=36.27$ 代入，则可算得平均支出比重

$$\alpha_1=\frac{p_1x_1}{M}=0.5879$$

$$\alpha_2=\frac{p_2x_2}{M}=0.1230$$

$$\alpha_3=\frac{p_3x_3}{M}=0.0980$$

由于

$$\beta_1=\frac{\partial p_1x_1}{\partial M}=0.4758$$

$$\beta_2=\frac{\partial p_2x_2}{\partial M}=0.1552$$

$$\beta_3=\frac{\partial p_3x_3}{\partial M}=0.1182$$

所以

$$\sigma_1=\frac{\beta_1}{\alpha_1}=0.8093$$

$$\sigma_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=1.2615$$

$$\sigma_3=\frac{\beta_3}{\alpha_3}=1.2057$$

由于湖北省大中城市民政部门算得的每月起码生活水平支出额$S=25$，所以 Frisch 参数

$$\phi=\frac{-M}{M-S}=\frac{-36.27}{36.27-25}=-3.2183$$

将$M$，$\alpha_i$，$\beta_i$，$\phi$之值代入式（2.3.32），则可算出起码生活水平的食品支出额 $p_1\bar{x}_1$，穿着支出额 $p_2\bar{x}_2$ 和日用品支出额 $p_3\bar{x}_3$，即

$$p_1\bar{x}_1=M\left(\alpha_1+\frac{\beta_1}{\phi}\right)$$

$$=36.27\left(0.5879+\frac{0.4758}{-3.2183}\right)=15.9609$$

同样

$$p_2\bar{x}_2=36.27\left(0.1230+\frac{0.1552}{-3.2183}\right)=2.7121$$

$$p_3\bar{x}_3=36.27\left(0.0980+\frac{0.1182}{-3.2183}\right)=2.2223$$

将$\sigma_i$，$p_i\bar{x}_i$，$M$和$\phi$之值代入式（2.3.39），则可算出食品的自身价格弹性

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\ \frac{p_1}{x_1}=-\sigma_1\left(\frac{p_1\bar{x}_1}{M}-\frac{1}{\phi}\right)$$

$$=-0.8093\left(\frac{15.9609}{36.27}-\frac{1}{-3.2183}\right)$$

$$=-0.6076$$

用同样的方法可算得衣着的自身价格弹性

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_2}\ \frac{p_2}{x_2}=-0.4863$$

日用品的自身价格弹性

$$\frac{\partial x_3}{\partial p_3}\ \frac{p_3}{x_3}=-0.4485$$

而食品对衣着和日用品的交叉价格弹性分别为

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1}=-\sigma_1\frac{p_2\bar{x}_2}{M}=-0.0605$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_3}\frac{p_3}{x_1}=-\sigma_1\frac{p_3\bar{x}_3}{M}=-0.0496$$

用类似方法我们还可算出所有的交叉价格弹性。

消费者最优经济效果是经济理论的基础，它比生产者最优经济效果问题更基本。这不但是指生产者最优经济效果要以消费者最优经济效果为基础，而且因为从生产函数和资源约束推导生产者最优经济效果的条件较容易，而消费者最优经济效果由于效用函数难以直接测度，研究起来困难得多。由于这一困难，我们只能通过需求函数来间接研究消费者的最优经济效果问题。所以近年来数理经济学的文献中有很大一部分是讨论需求系统问题。从五十年代以来，研究个别商品的需求函数发展到从效用函数导出所有商品的需求系统，并把这种研究效用函数的理论分析与做需求系统的计量模型紧密结合。如果从某种效用函数导出的需求系统与实际数据拟合得很好，则证明了相应的效用函数形式是可信的。很多文献进行了这种验证。

由于需求函数中描述的消费者追求其最优经济效果的需求量是价格和收入的函数，所以消费者最优经济效果在不考虑生产者最优经济效果问题时不具备唯一性。要最后确定消费者的唯一的最优经济效果，必须同时研究生产者最优经济效果，因为消费者最优经济效果往往与生产者最优经济效果矛盾，在什么条件下二者可以协调，达到唯一的最优综合经济效果，这正是下文中一般均衡理论所要研究的问题。

## § 2.4 间接效用函数和 AIDS

我们研究消费者的最优经济效果也可以将生活水平固定，即令效用函数等于常数，然后调节各种商品的消费比例，以便在给定价格的条件下使消费支出最小化，即

$$\min: \ M = p_1x_1 + p_2x_2$$

服从约束
$$U(x_1, x_2) = U^0 \tag{2.4.1}$$

其中$M$为总消费支出，$U^0$为某一常数效用水平。作拉氏函数

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda[U^0 - U(x_1, x_2)] \tag{2.4.2}$$

最优经济效果的必要条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= p_1 - \lambda\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= p_2 - \lambda\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= U^0 - U(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

若给定$p_1$，$p_2$，$U^0$，则上列三式只有三个未知数$x_1$，$x_2$，$\lambda$。联立三个方程可解出$x_1^*$，$x_2^*$，$\lambda^*$。将它们用$p_1$，$p_2$，$U^0$表示出，即

$$\begin{aligned} x_1^* &= f^1(p_1, p_2, U^0) \\ x_2^* &= f^2(p_1, p_2, U^0) \\ \lambda^* &= f^3(p_1, p_2, U^0) \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

$f^1$，$f^2$叫做**收入补偿需求函数**，它表示生活水平不变化时(即$U^0$为常数)，若价格$p_1$，$p_2$变化，则最小支出$M$亦要随之而变化，才能补偿价格的变化而维持生活水平不变，这时$x_1^*$，$x_2^*$也跟着发生了变化。

将$x_1^*$，$x_2^*$代入目标函数，则可求出最小支出

$$M^*=p_1x_1^*+p_2x_2^*$$
$$=p_1f^1(p_1,\ p_2,\ U^0)+p_2f^2(p_1,\ p_2,\ U^0)$$

上式中只含有$p_1$，$p_2$，$U^0$，所以$M^*$可改写为$p_1, p_2$，$U^0$的函数：

$$M^*=g(p_1,\ p_2,\ U^0)=p_1x_1^*+p_2x_2^* \qquad (2.4.5)$$

此式叫**支出函数**，即要维持一定的生活水平$U^0$，最小支出（达到最优消费效果的支出）是效用水平$U^0$和价格$p_1$，$p_2$的函数。

将$g$分别对$p_1$，$p_2$求导数，我们有：

$$\frac{\partial g}{\partial p_1}=x_1^*=f^1\ (p_1,\ p_2,\ U^0)$$
$$\frac{\partial g}{\partial p_2}=x_2^*=f^2\ (p_1,\ p_2,\ U^0) \qquad (2.4.6)$$

这是支出函数式（2.4.5）之最重要特性。**即最小支出对价格的导数等于用价格和效用$U^0$表出的最优需求量。**

若从式（2.4.5）中解出$U^0$，则$U^0$可表为$p_1$，$p_2$和$M^*$的函数，即

$$U^0=h(p_1,\ p_2,\ M^*) \qquad (2.4.7)$$

上式说明在达到最优消费效果时，效用水平是最小支出费用$M^*$（即可支配收入）及价格$p_1$，$p_2$的函数。这就是**间接效用函数**。

如果将式（2.4.7）代入式（2.4.4），则可将最优需求量$x_1^*$，$x_2^*$表为$p_1$，$p_2$和$M^*$的函数，这就是熟知的需求函数

$$x_1^*=\varphi^1(p_1,\ p_2,\ M^*)$$
$$x_2^*=\varphi^2(p_1,\ p_2,\ M^*) \qquad (2.4.8)$$

它与上节导出的需求函数的意义稍有不同。由于$M^*$为达到

某一效用水平之最小支出，所以这种需求函数通过$M^*$与支出函数式（2.4.5）及间接效用函数式（2.4.7）挂上了勾，但实质上我们这里导出的需求函数与上节的需求函数是一致的。二者的差别在于，上节的需求函数假定收入全部花掉，而此节的需求函数没有这个假定，而是假定达到一定的效用水平$U^0$，最优需求量$x_1^*$，$x_2^*$是价格$p_1$，$p_2$和最小支出$M^*$的函数。

近年应用得较多的支出函数或称费用函数为PIGLOG型的（Price Independent Gereralized Log——与价格无关的一般对数型），这种支出函数假定效用满足

$$0 < U < 1$$

因为效用是序数的，其数值大小无关紧要，只要用实数表示效用的次序就行，所以用0至1之间的实数作为效用次序是可取的。这种支出函数可写作

$$\log M = (1 - U)\log\{a(P)\} + U\log\{b(P)\} \tag{2.4.9}$$

其中$M$为总支出，$U$为效用，$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$为价格向量，$a(\cdot)$，$b(\cdot)$为适当的正的线性齐次函数形式。$a(P)$是维持起码生活水平的费用，$b(P)$为极乐状态之费用，因为上式可改写为

$$M = a^{1-U}b^U \tag{2.4.10}$$

当$U=0$时，表示起码生活水平，则$M=a$，为起码生活水平之总支出。当$U=1$时，表示生活水平的上极限，这时$M=b$，所以$b$为极乐生活水平之费用。由于$a$，$b$为$P$的函数，所以最小支出费用$M$亦为价格$P$和效用$U$之函数。Deaton在其〔1980〕文献中为了引入AIDS（几乎理想的需求系统），令

$$\log a = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma^*_{kj} \log p_k \log p_j$$

$$\log b = \log a + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \qquad (2.4.11)$$

将上两式代入式（2.4.9），则我们有 AIDS 费用函数：

$$\begin{aligned} \log M &= \log a + U[\log b - \log a] \\ &= \log a + U\left[\log a + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} - \log a\right] \\ &= \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_j \gamma^*_{kj} \log p_k \log p_j \\ &\quad + U\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \end{aligned} \qquad (2.4.12)$$

根据（2.4.6）式，我们有

$$\frac{\partial M}{\partial p_i} = x_i^*$$

两边同乘以$\frac{p_i}{M}$，则有

$$\frac{\partial M}{\partial p_i} \frac{p_i}{M} = \frac{p_i x_i^*}{M}$$

或写为

$$\frac{\partial \log M}{\partial \log p_i} = \frac{p_i x_i^*}{M} = w_i \qquad (2.4.13)$$

其中 $w_i$ 为 $i$ 商品支出金额之平均比重。

将式（2.4.12）中的 $\log M$ 对 $\log p_i$ 求导数，然后代入式（2.4.13），可得到

$$w_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \log p_j + U\beta_i\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}, \qquad (2.4.14)$$

例如对于两种商品的情形，式（2.4.12）为

$$\log M=\alpha_0+\alpha_1\log p_1+\alpha_2\log p_2+\frac{1}{2}[\gamma_{11}^*(\log p_1)^2+\gamma_{12}^*\log p_1\log p_2+\gamma_{21}^*\log p_2\log p_1+\gamma_{22}^*(\log p_2)^2]+U\beta_0 p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \tag{2.4.15}$$

将 $\log M$ 对 $\log p_1$ 求导数则

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log M}{\partial\log p_1}&=\alpha_1+\gamma_{11}^*\log p_1+\frac{1}{2}\gamma_{12}^*\log p_2\\&\quad+\frac{1}{2}\gamma_{21}^*\log p_2+U\beta_0\beta_1 p_1^{\beta_1-1}p_2^{\beta_2}\frac{dp_1}{d\ln p_1}\\&=\alpha_1+\frac{1}{2}(\gamma_{11}^*+\gamma_{11}^*)\log p_1\\&\quad+\frac{1}{2}(\gamma_{12}^*+\gamma_{21}^*)\log p_2\\&\quad+U\beta_0\beta_1 p_1^{\beta_1-1}p_2^{\beta_2}\frac{1}{\frac{d\log p_1}{dp_1}}\\&=\alpha_1+\gamma_{11}\log p_1+\gamma_{12}\log p_2+U\beta_0\beta_1 p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2},\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

其中 $\gamma_{11}=\frac{1}{2}(\gamma_{11}^*+\gamma_{11}^*)$， $\gamma_{12}=\frac{1}{2}(\gamma_{12}^*+\gamma_{21}^*)$

从式（2.4.9）解出 $U$，又因式（2.4.11）

$$U=\frac{\log M-\log a}{\beta_0 p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}} \tag{2.4.17}$$

将式（2.4.17）代入式（2.4.16），则得到 AIDS 结构模型

$$\frac{\partial\log M}{\partial\log p_1}=w_1=\alpha_1+\gamma_{11}\log p_1+\gamma_{12}\log p_2+\beta_1\log\frac{M}{a} \tag{2.4.18}$$

我们不难将上述推导扩大到 $n$ 种商品的情形，这时 AIDS 为

$$w_i=\alpha_i+\sum_j \gamma_{ij}\log p_j+\beta_i\log\frac{M}{a} \qquad (2.4.19)$$

我们可以视 $a$ 为一种特殊的价格指数，它由下式确定：

$$\log a=\alpha_0+\sum_k \alpha_k\log p_k+\frac{1}{2}\sum_j\sum_k \gamma_{kj}\log p_k\log p_j \qquad (2.4.20)$$

AIDS 是种非常有前途的需求系统，线性支出系统、二次效用函数导出的需求系统等等都只是它的特例。Deaton 用英国的实际数据和模型说明 AIDS 比其它需求系统都优越，而且 AIDS 便于检验我们下节将讨论的需求系统必须满足的 0 阶齐次性、对称性、负数特性及加总性，特别是AIDS 可以从实证的需求函数参数倒推间接效用函数，这是以前的需求系统无法做到的，所以AIDS为具体写出效用函数的结构和参数开辟了道路。

## §2.5 消费者最优经济效果之比较静态分析和需求函数特性●

上文中我们研究了消费者的静态最优经济效果问题，在分析中我们假定价格和收入为给定参数。如果价格、收入参数发生变化，则静态最优经济效果问题的最优解 $X^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)'$ 及 $\lambda^*$ 对参数 $P=(p_1,\cdots,p_n)$ 和 $M$ 变化的敏感性如何，这就是比较静态分析要讨论的问题。这种分析可以使我们导出需求函数的种种重要特性。实证的经济计量模型

● 本节的推导用了较多矩阵代数，不熟悉矩阵代数的读者可略去推演过程，但必须看推出的结果，特别是 Slutsky方程，需求函数的六个特性及本节最后的五个例题，以便理解本节的重要意义及用处。

必须尽量与这些理论特性接近。这些需求函数特性是检验模型是否符合经济规律的重要标准，有时它比统计检验的数学标准更重要，这就是经济模型与一般数理统计模型的主要区别之一。

由于比较静态分析的复杂性，用一般代数符号不便于理解推演过程，所以本节主要借助矩阵和向量符号来进行推导。例如，消费者达到最优经济效果的必要条件式（2.1.14）用向量符号可写为

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}} - \lambda \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$$

$$M - \boldsymbol{P}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \qquad (2.5.1)$$

其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_n)'$ 为列向量，$\boldsymbol{P} = (p_1, \cdots, p_n)$ 为行向量，$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{X}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$ 为行向量，黑体的 $\boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0)$ 为含 $n$ 个 0 元素的行向量。对于两种商品的情形式(2.5.1)中第一式可写为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) - \lambda (p_1, p_2) = (0, 0)$$

即

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2\right) = (0, 0)$$

这是根据向量加法等于向量各元素相加的运算法则导出的。因此上式可利用向量相等意味着向量（这里是行向量）的各元素相等的定义写为

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

式（2.5.1）中第二式可写为

$$M-(p_1,\ \ p_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

即

$$M-p_1x_1-p_2x_2=0$$

下面的推导我们不再这样具体展开讨论，稍复习一下矩阵代数，并用两种商品的最简单情形作例，读者不难自己将矩阵向量式展成普通代数式。如此练习多次熟悉了矩阵向量语言就可以不必进行这种“翻译”，而直接用矩阵向量语言分析问题了，这样理解本节的分析效率就比用一般代数语言效率高得多。另外元素全为 0 的向量我们不再用黑体字标明，读者从与之相应的向量或矩阵式可以自己判断 0 究竟是表示一个数量还是一个向量。

从式（2.5.1）可解出最优需求量 $\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)'$ 及收入之影子价格 $\lambda^*$，它们都是 $\boldsymbol{P}$ 和$\boldsymbol{M}$的函数：

$$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P},M),\ \ \lambda^*=\lambda^*(\boldsymbol{P},M)$$

注意 $\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P},M)$为多个需求函数 $[x_1^*(\boldsymbol{P},M),\cdots,x_n^*(\boldsymbol{P},M)]'$ 组成的列向量函数，而 $\lambda^*(\boldsymbol{P},M)$ 为一个函数。

将上式代入式（2.5.2）可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P},M)]}{\partial \boldsymbol{X}}-\lambda^*\boldsymbol{P}\equiv 0\\ &M-\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P},M)\equiv 0\end{aligned}\qquad(2.5.2)$$

上列第一式中的$\dfrac{\partial U[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{P},M)]}{\partial \boldsymbol{X}}$为含 $n$ 个元素的行向量，$P$ 为含 $n$ 个元素的行向量，右边的 0 亦为含 $n$ 个 0 元素的行向量，所以第一个恒等式和式（2.5.1）的第一式一样共含 $n$ 个式子。

我们先考虑最优解 $\boldsymbol{X}^*$，$\lambda^*$对收入参数$M$变化的敏感性 $\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M}$ 和$\frac{\partial \lambda^*}{\partial M}$。为此我们先将式（2.5.2）对$M$求导数得到

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial M} - p_j \frac{\partial \lambda^*}{\partial M} = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{2.5.3}$$

$$1 - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial M} = 0$$

引入列向量记号

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} = \left( \frac{\partial x_1^*}{\partial M}, \cdots, \frac{\partial x_n^*}{\partial M} \right)' \tag{2.5.4}$$

式（2.5.3）可改写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} - \boldsymbol{P}' \frac{\partial \lambda^*}{\partial M} &= 0 \\ -P \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} &= -1 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

其中$\boldsymbol{H}$为$U$对 $\boldsymbol{X}$ 之二阶导数 Hessin 矩阵，即

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \, \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \, \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \, \partial x_n} \end{pmatrix}$$

式（2.5.5）可写成更紧凑的矩阵的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{P}' \\ -\boldsymbol{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2.5.6}$$

式（2.5.6）就是式（2.5.3）的缩写形式，其中包含$n+1$个式子。

现在若有一种商品的价格$p_l$变化，而其它商品的价格不变，将出现什么后果呢？

将式（2.5.2）对$p_l$求导数，我们得到：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial x_k^*}{\partial p_l}-p_j\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_l}-\lambda^*\delta_{jl}=0,\quad j=1,\cdots,n \tag{2.5.7}$$

$$-\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}-x_l^*=0$$

其中$\delta_{jl}$为1-0算符，若$j=l$，则$\delta_{jl}=1$，若$j\neq l$，则$\delta_{jl}=0$。

$x_k^*$对$p_j$的敏感性$\frac{\partial x_k^*}{\partial p_j}$（$k=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,n$）可用一个矩阵记为

$$\frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{P}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\end{bmatrix} \tag{2.5.8}$$

收入之影子价格$\lambda^*$对$p_j$的敏感性可用行向量记为

$$\frac{\partial\lambda}{\partial \mathbf{P}}=\left[\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial\lambda^*}{\partial p_n}\right] \tag{2.5.9}$$

引入矩阵、向量记号后，式（2.5.7）可改写为

$$\begin{bmatrix} H & -P' \\ -P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X^*}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* In \\ X^{*\prime} \end{bmatrix} \qquad (2.5.10)$$

其中$In$为$n \times n$单位矩阵。

若某种商品价格提高，而收入随之增加，其增加量正好抵消此种商品价格提高的影响，因而使人民实际生活水平不变，即效用保持不变，这种价格变化的后果叫做价格变化之**收入补偿效应**，或简称**补偿效应**。将$U$和$M$分别求微分，由于最优经济效果的条件为$\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{X}} - \lambda \boldsymbol{P} = 0$，且$M = \boldsymbol{PX}$，所以我们有

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} d\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{P}(d\boldsymbol{X}) \\ dM &= \boldsymbol{P}(d\boldsymbol{X}) + (d\boldsymbol{P})\boldsymbol{X} \end{aligned} \qquad (2.5.11)$$

生活水平不变，即要求$dU = 0$，代入上式，则

$$\lambda \boldsymbol{P}(d\boldsymbol{X}) = 0$$

由于$\lambda \neq 0$，所以

$$\boldsymbol{P}(d\boldsymbol{X}) = 0$$

又代回式（2.5.11），则

$$dM = (d\boldsymbol{P})\boldsymbol{X} \qquad (2.5.12)$$

若只有$l$商品之价格$p_l$变化，其它价格不变，则上式变成

$$dM = (dp_l)x_l \qquad (2.5.13)$$

为分析$p_l$变化的补偿效应，将式（2.5.2）对$p_l$求导数，并将式（2.5.13）代入，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial p_l} - p_j \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_l} - \lambda^* \delta_{jl} = 0,$$

$$j = 1, \cdots, n$$

(2.5.14)

$$-\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} = 0$$

用矩阵向量形式可记为

$$\boldsymbol{H}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{u不变} - \boldsymbol{P}'\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{u不变} = \lambda^* \boldsymbol{I}n$$

(2.5.15)

$$-\boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{u不变} = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & -\boldsymbol{P}' \\ -\boldsymbol{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{u不变} \\ \left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{u不变} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^* \boldsymbol{I}n \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.5.16)$$

式（2.5.6）、式（2.5.10）和式（2.5.16）是消费者最优经济效果比较静态分析的三个基本公式。要求出 $\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M}$，$\frac{\partial \lambda^*}{\partial M}$，$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}$，$\frac{\partial \lambda^*}{\partial \boldsymbol{P}}$，都碰到滚边 Hessin 矩阵的求逆问题。

为此我们稍微复习一下线性代数。

每行与每列的元素只含有一个 1，其余元素都为 0 的方阵叫**排列矩阵或叫置换矩阵**，例如矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

一个可分解方阵 $\boldsymbol{A}$，可以用排列矩阵 $\boldsymbol{P}$，经过下列变换变成分块矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21}&0\end{array}\right]=\boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{12}$ 的列数等于 $\boldsymbol{A}_{21}$的行数。例如

$$\begin{bmatrix}5&3&1\\0&2&0\\0&-8&0\end{bmatrix}$$

用排列矩阵$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$，可变换成分块矩阵

$$\begin{bmatrix}3&1&5\\2&0&0\\-8&0&0\end{bmatrix}$$

最后复习分块矩阵的求逆算法。设有分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]$$

若 $\boldsymbol{A}_{11}$和$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}$为非奇异，则

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} A_{11}^{-1}(I+A_{12}D^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) & -D^{-1}A_{11}^{-1}A_{12} \\ \hdashline -D^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D^{-1} \end{array}\right] \tag{2.5.17}$$

现在我们回顾滚边 Hessin 矩阵的求逆。由于 Hessin 矩阵负定，所以它亦非奇异，于是

$$\begin{bmatrix} H & -P' \\ -P & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\left[\begin{array}{c:c} H^{-1}[I+(-P')D^{-1}(-P)H^{-1}] & -D^{-1}H^{-1}(-P') \\ \hdashline -D^{-1}(-P)H^{-1} & D^{-1} \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c:c} H^{-1}+D^{-1}H^{-1}P'PH^{-1} & D^{-1}H^{-1}P' \\ \hdashline D^{-1}PH^{-1} & D^{-1} \end{array}\right] \tag{2.5.18}$$

其中 $D^{-1}=\dfrac{1}{0-(-P)H^{-1}(-P')}=\dfrac{-1}{PH^{-1}P'}$ (2.5.19)

将式 (2.5.18) 代回式 (2.5.6)，可求出

$$D^{-1}=-\frac{\partial\lambda^*}{\partial M}$$

由于 $\lambda^*=\dfrac{\partial U^*}{\partial M}$，若令 $\mu=D^{-1}$，则 $\mu$ 可解释为收入之边际效用递减速率，即

$$\mu=-\frac{\partial\lambda^*}{\partial M}=-\frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{\partial U^*}{\partial M}\right)=-\frac{\partial^2U^*}{\partial M^2} \tag{2.5.20}$$

$\mu$ 与 Frisch 参数 $\phi$ 的关系为

$$\mu=-\phi\frac{\lambda^*}{M} \tag{2.5.21}$$

其中 $\phi = \frac{\partial \lambda^*}{\partial M} \frac{M}{\lambda^*}$ 为收入之边际效用对收入的弹性。由于 $\mu > 0$，所以 Frisch 参数小于 0。

再将式 (2.5.18) 代回式 (2.5.6)、(2.5.10) 和式 (2.5.16)，可解出

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} = -\mu \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}' \tag{2.5.22}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}} = \boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* + \mu \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* + \mu \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}^{*\prime} \tag{2.5.23}$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U\text{不变}} = \boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* + \mu \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* \tag{2.5.24}$$

将式 (2.5.22)、式 (2.5.24) 代入式 (2.5.23)，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U\text{不变}} - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M}\boldsymbol{X}^{*\prime} \tag{2.5.25}$$

这就是著名的 Slutsky 方程，由 Slutsky 于1915年导出。此式在消费者最优经济效果分析和需求函数理论中非常有用，需求函数的一些重要特性都由它导出。Slutsky 方程对于 $j$ 商品需求量和 $l$ 商品价格的具体形式为

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U\text{不变}} - \frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*, \quad j = 1, \cdots, n \quad l = 1, \cdots, n \tag{2.5.26}$$

其中 $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U\text{不变}}$ **为替代项**，它表示在生活水平不变的条件下 $l$ 商品的价格提高会使 $j$ 商品需求量变化多少，也就是收入增加抵消 $p_l$ 上升使 $U$ 为常数时，$p_l$ 上升对 $x_j^*$ 的影响。而 $-\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$ 表示收入 $M$ 变化对 $x_j^*$ 的影响，叫**收入项**，所以 $p_l$ 变化对 $x_j^*$ 的影响是替代效应（由替代项表示）和收入效应（由

收入项表示）之代数和。

对 Slutsky 方程的讨论可分为两种情况：

（1）$l$ 商品与 $j$ 商品为替代品，则$\frac{\partial x_j^*}{\alpha p_l}<0$，且

$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}<0$。其中$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$为收入不变时，$p_l$上升使$x_j^*$下降的数量；而$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$为$p_l$上升且收入$M$同时上升，以保持效用$u$不变时，$x_j^*$下降的数量。$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$的绝对值肯定小于$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$的绝对值，因为$M$的上升会抵消一部分替代作用。因此$-\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$反映了$M$变化抵消的那一部分替代作用。所以我们必须将这一部分加到$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$上才会等于$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$。由于$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$和$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$都小于0，所以减去$\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$相当于将$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$的绝对值与$\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$相加。

（2）若$l$商品与$j$商品为互补品，则$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}>0$，$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}>0$。由于$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$表示$p_l$上升时，收入$M$同时上升，以使$U$不变，所以$x_j^*$的上升就有两部分，一部分是价格$p_l$上升的影响，一部分是$M$上升的影响。所以 Slutsky 方程可改写为

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}=\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}+\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$$

此式说明 $p_l$ 上升，若有收入补偿，即$M$同时上升，以使$U$不变，则 $x_j^*$ 的上升分为两部分：一部分是单纯价格上升的影响，由$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$表示，另一部分是收入上升的影响，由$\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$表示。此式意味着，$U$不变时，调节价格 $p_l$，会使 $x_j^*$ 变化，这就是$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U不变}$。要使$U$不变，则当 $p_l$ 上升时，就要使收入$M$相应上升，因为 $p_l$ 上升时，$M$不变，则实际生活水平$U$会下降。这种$U$不变时，$p_l$ 变化造成的$x_j^*$的变化分为两部分，一部分是不增发价格补贴，即收入不变时，$p_l$ 上升对 $x_j^*$ 的影响，即$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}$；另一部分是为了使$U$不变，$M$上升对 $x_j^*$ 的影响，即$\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*$。

根据式 (2.5.24)，由于 Hessin 矩阵$\boldsymbol{H}$为对称矩阵，由线性代数可知，对称矩阵的逆阵$\boldsymbol{H}^{-1}$亦为对称的，所以$\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}$ 亦为对称的，乘上常数 $\lambda^*$后，仍为对称的。所以替代效应矩阵。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U不变}\text{ 为对称矩阵。}$$

结合 Slutsky 方程，考虑$\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U不变}$的对称性，易知

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}+\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M}\boldsymbol{X}^{*\prime}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U不变}\text{ 亦为对称矩阵。}$$

因此我们导出**需求函数的对称性**条件：

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}+\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*=\frac{\partial x_l^*}{\partial p_j}+\frac{\partial x_l^*}{\partial M}x_j^* \qquad (2.5.27)$$

$$j=1,\ \cdots,\ n,\quad l=1,\ \cdots,\ n$$

此式意味着在生活水平不变（$U$为常数）的条件下 $j$ 商品替代 $l$ 商品的能力与 $l$ 商品替代 $j$ 商品的能力相等，也就是

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U\text{不变}}=\left(\frac{\partial x_l^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}} \qquad \begin{matrix} j=1,\ \cdots,\ n \\ l=1,\ \cdots,\ n \end{matrix} \qquad (2.5.28)$$

换言之，$p_l$ 上升 1 单位引起 $x_j^*$ 的下降与 $p_j$ 上升一单位引起的 $x_l^*$的下降应相等。

从式（2.5.24）还不难看出，由于 Hessin 矩阵$\boldsymbol{H}$ 是负定的（效用函数的凹性），根据线性代数，若矩阵$\boldsymbol{H}$负定，则其逆阵 $\boldsymbol{H}^{-1}$ 亦负定，所以$\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U\text{不变}}$ 矩阵也是负定的。对于三种商品的情形，我们可以将此矩阵写为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_3} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_3} \\ \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_3^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_3^*}{\partial p_3} \end{pmatrix}_{U\text{不变}}$$

两边乘上 $d\boldsymbol{P}$，$(d\boldsymbol{P})'$，则

$$(dp_1\ dp_2\ dp_3)\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right]\begin{pmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ dp_3 \end{pmatrix}<0$$

展开后就是二次式

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} dp_i dp_j < 0 \tag{2.5.29}$$

令 $dp_1 \neq 0$，$dp_2 = dp_3 = 0$，则上式意味着

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{U\text{不变}} (dp_1)^2 < 0$$

若 $dp_1 = dp_3 = 0$，$dp_2 \neq 0$，则（2.5.29）变成

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}\right)_{U\text{不变}} (dp_2)^2 < 0$$

若 $dp_1 = dp_2 = 0$，$dp_3 \neq 0$，则（2.5.29）变成

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_3}\right)_{U\text{不变}} (dp_3)^2 < 0$$

这就证明了

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}} < 0,\quad j = 1,\ \cdots,\ n \tag{2.5.30}$$

这就是熟知的在效用不变条件下需求函数**自身价格替代效应的负数特性**。

回顾 Slutsky 方程，若令 $j = l$，则

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right) + \frac{\partial x_j^*}{\partial M} x_j^* \tag{2.5.31}$$

它表示若收入变化抵偿 $j$ 商品自身价格变化，使效用不变，则需求变化为自身价格效应与收入效应之代数和。由于 $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}}$ 恒为负，则当此商品为正常商品时，$\frac{\partial x_j^*}{\partial M} > 0$，所以 $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$。若 $j$ 商品为劣等商品，则收入上升，反而使需求减少，例如收入上升，人们对大米、面粉的需求上升，而对玉米、高粱的需求会下降，玉米、高粱就是劣等商品，其 $\frac{\partial x_j^*}{\partial M} < 0$。这时，若

$$\left|\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{U不变}\right| > \left|\frac{\partial x_j^*}{\partial M} x_j^*\right|$$

则$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$，若上式的大于号变成小于号，则$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$。这就是著名的 Giffen 效应。

用$\boldsymbol{P}$左乘式（2.5.22），且因为 $\mu = \frac{-1}{\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'}$，所以我们有

$$\boldsymbol{P}\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M} = -\mu \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}' = \frac{-(-1)}{\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}' = 1 \tag{2.5.32}$$

上式写成求和形式为

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial M} = 1 \tag{2.5.33}$$

若价格为常数，则上式可改写为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j x_j^*}{\partial M} = 1 \tag{2.5.34}$$

这就是著名的**恩格尔总量条件**，即所有商品消费额占收入之边际比重的代数和等于1。若令 $j$ 商品边际消费额比重为 $\beta_j$，$j$ 商品消费额 $p_j x_j^*$对收入$M$的弹性为$\sigma_j = \frac{\partial p_j x_j^*}{\partial M}\frac{M}{p_j x_j^*}$，$j$ 商品消费额占收入$M$的平均比重为$\alpha_j = \frac{p_j x_j^*}{M}$，则(2.5.34)式可改写为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j x_j^*}{\partial M} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_j x_j^*}{\partial M} \cdot \frac{M}{p_j x_j^*} \cdot \frac{p_j x_j^*}{M}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1 \tag{2.5.35}$$

回顾式（2.3.34）和式（2.3.35），可知线性支出系统(LES)很容易检验恩格尔总量条件。而式（2.5.35）严格地证明了这个总量条件，因而使其更一般化。还可以推广到任何需求系统。

用 $P$ 向量左乘式（2.5.24）可得

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U\text{不变}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* + \frac{-1}{\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'}\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^*$$

$$= \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* - \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{-1}\lambda^* = 0 \qquad (2.5.36)$$

再用 $P$ 左乘 Slutsky 方程式（2.5.25），并将式(2.5.32)和式（2.5.36）代入，则有

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right) = \boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{U\text{不变}} - \boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial M}\right)\boldsymbol{X}^{*\prime}$$

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{P}}\right) + \boldsymbol{X}^{*\prime} = 0 \qquad (2.5.37)$$

上式展开后是

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + x_i^* = 0 \qquad (2.5.38)$$

这就是需求函数的 Cournot **总量条件**。

最后我们证明**需求函数的 0 阶齐次性**。

消费者最优经济效果的必要条件为

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (2.5.39)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

上式可改写为

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=\frac{\frac{p_1}{M}}{\frac{p_2}{M}}$$

$$\frac{p_1}{M}x_1+\frac{p_2}{M}x_2=1 \tag{2.5.40}$$

最优需求量 $x_1^*$，$x_2^*$ 是从上式解出来的。若 $p_1$，$p_2$，$M$ 同时提高 $\alpha$ 倍，则上式的形式完全不变，因为所有 $\alpha$ 全可约去。所以从上式解出的最优需求量

$$x_1^*=f^1(\alpha p_1,\ \alpha p_2,\ \alpha M)$$

$$x_2^*=f^2(\alpha p_1,\ \alpha p_2,\ \alpha M) \tag{2.5.41}$$

仍不变，这就证明了需求量是所有价格和收入的 0 阶齐次函数。其经济意义是，所有商品价格和收入等比例变化时，需求量保持不变。

上述推导是纯理论的规范分析。它以效用函数存在定理为基础，并假定效用函数为严格准凹函数或严格凹函数，因而其滚边 Hessin 矩阵或 Hessin 矩阵负定。于是在预算约束下，效用最大化的消费者行为规律表现为需求函数；从效用函数的特性又可导出前文所述的需求函数的种种特性：

（1）需求函数的负数特性，即

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}}<0,\quad j=1,\ \cdots n$$

也就是在有收入补偿作用下商品自身价格的替代效应为负；

（2）需求函数的 0 阶齐次性，即所有商品价格和收入等比例上涨，需求量不变；

（3）需求函数替代效应的对称性，即

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right)_{U\text{不变}}=\left(\frac{\partial x_l^*}{\partial p_j}\right)_{U\text{不变}}\qquad \begin{matrix} j=1,\ \cdots,\ n \\ l=1,\ \cdots,\ n \end{matrix}$$

或写为

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}+\frac{\partial x_j^*}{\partial M}x_l^*=\frac{\partial x_l^*}{\partial p_j}+\frac{\partial x_l^*}{\partial M}x_j^*\qquad \begin{matrix} j=1,\ \cdots,\ n \\ l=1,\ \cdots,\ n \end{matrix}$$

也就是 $j$ 商品替代 $l$ 商品的能力等于 $l$ 商品替代 $j$ 商品的能力；

（4）加总条件

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = M$$

即用来购买所有商品的总金额等于总支出；

（5）恩格尔总量条件

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial M} = 1$$

即增加1元支出时，因此而增加的各种商品消费金额之总和亦为1元；

（6）古诺总量条件

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} + x_l^* = 0$$

以上规范分析是实证分析的坚实基础，它使需求函数的经济计量模型区别于用一般数理统计方法做出的回归模型。自从五十年代以来，特别是最近若干年，这种规范分析日益紧密地与实证经济计量分析相结合。实践证明，这套抽象需求理论即消费者最优经济效果理论是实际应用的最有力的工具和最根本的基础，没有这套抽象理论，做需求系统的经济计

量模型就失去了理论指导。这套理论不但为需求系统提供了模型结构，而且提出了上述若干比统计检验标准更重要的检验需求系统的标准。

这些事实说明对于抽象理论研究必须重视，理论研究与应用的结合也要正确处理，不能要求搞理论的人也都要搞应用，例如 Slutsky 方程的实证应用比理论的提出迟六十多年，但如果没有 Slutsky 方程，需求模型的应用就不会有今天的成果。搞理论和应用的要适当分工，理论的抽象性与应用并不矛盾，一般越抽象的理论从长远看越有用，急于应用反而会影响应用的效果。因为抽象理论要经过相当时期的文献积累才能达到应用水平。当然这里说的抽象理论是指数学化，公理化的可称为规范分析的科学抽象，而不是那些缺乏逻辑结构的空谈。

**例 1** 我们用需求函数的特性理论来讨论 AIDS 模型参数必须满足的条件。

回顾式（2.4.19），AIDS 为

$$w_i=\alpha_i+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\log p_j+\beta_i\log\frac{M}{a}$$

其中 $a$ 为价格指数，$\frac{M}{a}$ 为实际收入。$w_i=\frac{p_i x_i}{M}$ 为 $i$ 商品之消费金额占收入之平均比重。对于两种商品的情形，上式可写为

$$\frac{p_1x_1}{M}=\alpha_1+\gamma_{11}\log p_1+\gamma_{12}\log p_2+\beta_1\log\frac{M}{a}$$

或

$$x_1=\frac{M}{p_1}\left(\alpha_1+\gamma_{11}\log p_1+\gamma_{12}\log p_2+\beta_1\log\frac{M}{a}\right) \tag{2.5.42}$$

所以

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\gamma_{12}M}{p_1p_2} \tag{2.5.43}$$

同理

$$\frac{\partial x_2}{\partial p_1}=\frac{\gamma_{21}M}{p_1p_2}$$

Slutsky 对称性条件 要求$\frac{\partial x_1}{\partial p_2}=\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$，这意味着

$$\gamma_{12}=\gamma_{21} \tag{2.5.44}$$

推而广之，对于多种商品而言，AIDS 满足 Slutsky 对称性的条件是

$$\gamma_{ij}=\gamma_{ji}。 \tag{2.5.45}$$

AIDS 要满足 0 阶齐次性，则要求（2.5.42)式中的$M$，$p_1$，$p_2$同时增加$k$倍，$x_1$不变。若$M$和$p_1$，$p_2$同时增加$k$倍，式（2.5.42）中的$\frac{M}{p_1}$值不变，因此要$x_1$不变，则要求式（2.5.42）中括号中的式子为 0 阶齐次的。此式可改写为

$$\begin{aligned}&\alpha_1+\gamma_{11}\log p_1+\gamma_{12}\log p_2+U\beta_1\beta_0p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\\&=\log Ap_1^{\gamma_{11}}p_2^{\gamma_{12}}+U\beta_1\beta_0p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\end{aligned} \tag{2.5.46}$$

其中 $\log A=\alpha_1$。设收入变动为$dM$，价格变动为$dp_1$，$dp_2$，则需求函数的 0 阶齐次性意味着上式中的$dx_1=0$，$dx_2=0$：

$$dM=p_1dx_1+x_1dp_1+p_2dx_2+x_2dp_2$$

即

$$dM=x_1dp_1+x_2dp_2$$

根据（2.5.12）式，效用不变的条件正是

$$dM=x_1dp_1+x_2dp_2$$

所以需求函数的 0 阶齐次性要求收入价格等比例变化时，式

(2.5.46) 中的$U$不变。所以要式 (2.5.46) 为价格和收入的 0 阶齐次函数，只要求

$$\gamma_{11}+\gamma_{12}=0,\quad \beta_1+\beta_2=0$$

推而广之，AIDS 满足 0 阶齐次性的条件是，参数必须使下式成立，即

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i=0 \qquad (2.5.47)$$

若将式 (2.4.19) 对 $i$ 求和，则有

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\log p_j + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\log\frac{M}{a} \qquad (2.5.48)$$

因为商品消费金额占总收入比重$w_i=\frac{p_i x_i}{M}$之总和等于 1，所以上式意味着

$$1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\log p_j+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\log\frac{M}{a} \qquad (2.5.49)$$

根据式 (2.5.47)，$\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}=0$，所以上式成立的条件还有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1 \qquad (2.5.50)$$

这就是需求系统的加总条件。

Deato 在其〔1980〕文献中用 AIDS 做了英国的需求系统

模型，模型参数与上述条件吻合得相当好。

**例 2** 我们可以证明线性需求函数不具备加总性。

设有线性需求函数。

$$x_i=\alpha_i+\beta_{i1}p_1+\beta_{i2}p_2+B_iM \quad i=1,2 \qquad (2.5.51)$$

上式 $i=1$，2，意味着只有两类商品。如果具备加总性，则

$$M\equiv p_1x_1+p_2x_2\equiv p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\beta_{11}p_1^2+(\beta_{12}+\beta_{21})p_1p_2 +\beta_{22}p_2^2+(B_1p_1+B_2p_2)M \qquad (2.5.52)$$

两边对$M$求偏导数，得

$$\frac{\partial M}{\partial M}\equiv 1\equiv B_1p_1+B_2p_2 \qquad (2.5.53)$$

由于 $p_1$，$p_2$ 是可以变动的自变量，所以上式不可能恒等于1，这就证明了线性需求函数不可能满足加总条件。以上证明可推广到有 $n$ 种商品的情形。可见线性需求函数不适于做包含所有商品的需求系统模型，而只能在一定范围内近似地描述个别商品的需求规律。但我们在§2.3证明了线性支出系统可以满足加总性，它是适于做需求系统模型的。

**例 3** 我们可以证明 Cobb-Douglas 型需求函数不满足加总性。

设有 Cobb-Douglas 型需求函数为

$$x_i=A_ip_1^{\alpha_i}p_2^{\beta_i}M^{\gamma_i} \qquad i=1,2 \qquad (2.5.54)$$

则 $$\ln x_i=\ln A_i+\alpha_i\ln p_1+\beta_i\ln p_2+\gamma_i\ln M$$

即 $$x_i=e^{\ln A_i+\alpha_i\ln p_1+\beta_i\ln p_2+\gamma_i\ln M} \qquad i=1,2 \qquad (2.5.55)$$

所以 $$M\equiv p_1x_1+p_2x_2\equiv e^{\ln p_1+\ln A_1+\alpha_1\ln p_1+\beta_1\ln p_2+\gamma_1\ln M} +e^{\ln p_2+\ln A_2+\alpha_2\ln p_1+\beta_2\ln p_2+\gamma_2\ln M} \qquad (2.5.56)$$

其中我们利用了下列关系

$$p_i=e^{\ln p_i}$$

令 $$\theta_1=(1+\alpha_1)\ln p_1+\ln A_1+\beta_1\ln p_2+\gamma_1\ln M \tag{2.5.57}$$

$$\theta_2=(1+\beta_2)\ln p_2+\ln A_2+\alpha_2\ln p_1+\gamma_2\ln M$$

则将式（2.5.56）对 $\ln p_1$ 求偏导数，我们有

$$\frac{\partial M}{\partial \ln p_1}=0\equiv(1+\alpha_1)e^{\theta_1}+\alpha_2 e^{\theta_2} \tag{2.5.58}$$

由于 $e^{\theta_1}\neq 0$，$e^{\theta_2}\neq 0$，所以上列恒等式要求

$$1+\alpha_1=0，即\alpha_1=-1 \tag{2.5.59}$$

且 $$\alpha_2=0$$

将式（2.5.56）对 $\ln p_2$ 求偏导数可证恒等式成立要求

$$\beta_1=0，\beta_2=-1, \tag{2.5.60}$$

将式（2.5.59）和式（2.5.60）代回式（2.5.56），则

$$M\equiv e^{\ln A_1+\gamma_1\ln M}+e^{\ln A_2+\gamma_2\ln M} \tag{2.5.61}$$

即

$$\frac{M}{M}\equiv 1\equiv e^{\ln A_1+(\gamma_1-1)\ln M}+e^{\ln A_2+(\gamma_2-1)\ln M} \tag{2.5.62}$$

上述推导中利用了下列关系

$$\frac{1}{M}=e^{\ln\frac{1}{M}}=e^{-\ln M}$$

将式（2.5.62）对 $\ln M$ 连续求两次导数，则

$$0\equiv(\gamma_1-1)^2e^{\ln A_1+(\gamma_1-1)\ln M}+(\gamma_2-1)^2e^{\ln A_2+(\gamma_2-1)\ln M} \tag{2.5.63}$$

上式要求 $$\gamma_1=1，\gamma_2=1 \tag{2.5.64}$$

由于

$$\frac{p_1x_1}{M}=\frac{p_1A_1p_1^{\alpha_1}p_2^{\beta_1}M^{\gamma_1}}{M} \tag{2.5.65}$$

则当 $\gamma_1=1$，且根据式（2.5.59）和式（2.5.60）$\alpha_1=-1$，

$\beta_1 = 0$，所以

$$\frac{p_1 x_1}{M} = A_1$$

同理可证

$$\frac{p_2 x_2}{M} = A_2$$

这显然不合恩格尔定律。恩格尔定律提出当收入$M$变化时，食品的支出金额 $p_1x_1$ 占$M$的比重会下降，即$\frac{p_i x_i}{M}$不可能都是常数，而应该有相当一部分$\frac{p_i x_i}{M}$是变量。这就反证了加总条件的恒等式（2.5.56）不可能成立。

以上反证法可推广到有 $n$ 种商品的情形，即不难证出 Cobb-Douglas 型需求函数满足加总性的条件为

$$\frac{p_i x_i}{M} = A_i \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.5.66}$$

由于$A_i$为不变常数，所以这一条件与熟知的恩格尔定律矛盾，故此种需求函数不可能满足加总性。

但是从 Cobb-Douglas 型效用函数导出的 LES，只要其参数满足一定条件就能满足加总性。可见我们并不是能任意选择数学模型来做经济模型的，也不是仅要求数理统计的各种检验过关就可以判断一种数学模型描述经济规律的可信度，而是必须以经济理论为基础来选择数学模型。经济理论提出的各种检验标准比数理统计的各种检验标准更基本更重要。这些例题都说明了本节从效用理论导出需求函数种种特性的抽象理论实际上对应用有重要的指导意义。当然，满足一切经济理论要求的需求函数即使能写出来，也将过于复杂

而不便应用，所以实际上我们常将函数简化。不过这种简化可能引起的问题，我们应随时加以注意，切莫把单纯的统计结论应用到超出允许的范围。

**例 4**　线性需求函数不具备 0 阶齐次性。

设有线性需求函数

$$x_i=\alpha_i+\beta_{i1}p_1+\beta_{i2}p_2+B_iM,\quad i=1,\ 2 \qquad (2.5.67)$$

0 阶齐次性意味着 $p_1$，$p_2$，$M$都乘以常数 $\lambda$ 时，$x_i$ 不变，即

$$x_i=\alpha_i+\beta_{i1}\lambda p_1+\beta_{i2}\lambda p_2+B_i\lambda M \qquad (2.5.68)$$

将式（2.5.68）减去式（2.5.67）则

$$\beta_{i1}(\lambda-1)p_1+\beta_{i2}(\lambda-1)p_2+B_i(\lambda-1)M\equiv 0 \qquad (2.5.69)$$

由于 $p_1$，$p_2$，$M$都是可以变化的自变量，所以上式成立的条件为

$$\beta_{i1}=0,\ \beta_{i2}=0,\ B_i=0,\quad i=1,\ 2 \qquad (2.5.70)$$

代入式（2.5.67），则 0 阶齐次性意味着

$$x_i=\alpha_i \qquad (2.5.71)$$

以上推导可推广到 $n$ 种商品的情形。需求量等于不变常数 $\alpha_i$，这显然不可能，这就反证了线性函数不满足 0 阶齐次性。

**例 5**　设有 Cobb-Douglas 型需求函数

$$x_i=A_ip_1^{\alpha_i}p_2^{\beta_i}M^{\gamma_i}\qquad i=1,\ 2 \qquad (2.5.72)$$

从齐次函数的特性知，只有当对于所有 $i$，

$$\alpha_i+\beta_i+\gamma_i=0 \qquad (2.5.73)$$

时，Cobb-Douglas 型需求函数才满足 0 阶齐次性。

对于 LES 来说，则一定满足 0 阶齐次性。设有 LES 模型

$$p_i x_i = p_i \bar{x}_i + \beta_i \left( M - \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j \right) \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.5.74}$$

若所有价格和收入都提高到原来的 $\lambda$ 倍，则上式变成

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{x}_i + \frac{\beta_i}{\lambda p_i} \left( \lambda M - \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j \right) \\ &= \bar{x}_i + \frac{\beta_i}{p_i} \left( M - \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j \right) \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{2.5.75}$$

这就是原来的需求函数，即所有价格 $p_i$ 和收入$M$等比例变化时，所有商品的需求量 $x_i$ 保持不变。

## §2.6 消费者作为商品需求者和作为劳动时间、储蓄资金供给者的最优经济效果问题

消费者不但是商品的需求者，同时也是劳动和储蓄资金的供给者。劳动的供给可以视为对休息时间的负需求，而对资金的供给亦可视为消费者对资金的负需求。休息和娱乐时间的增加会给人带来幸福，也就是使总效用增加；反之，劳动的增加（即休息的减少）会使人们的总效用减少。于是我们将劳动与效用函数联系起来了。劳动与休息的替代作用是经济中最重要的现象，我们平时讨论的责任制、物质刺激、劳动效率、磨洋工等问题实质上都是劳动与休息的替代问题。劳动者只有在其劳动收入带来的效用大于减少休息（即增加劳动）减少的效用时，劳动供给才会增加，否则就会出现出工不出力、磨洋工等休息对劳动的替代效应。劳动与休息的比例怎样确定才能使效用最大化呢？这也是消费者的最优经

济效果问题，消费者追求这种最优经济效果的行为规律决定了真正有效的劳动的供给规律，亦决定了对商品的需求规律以及商品需求与闲暇需求之间的关系。

设有一消费者，其效用函数为

$$U(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \tag{2.6.1}$$

$x_1$，$x_2$为两种商品之消费量，$x_3$为休息时间，$x_4$为手持现金量，手持现金能随时买东西，它有一种灵活偏好效用，即购买各种不同商品的方便使人们得到某种满足。劳动时间支出若为$v_1$，则$v_1=-x_3$，即增加劳动时间的支出就会减少休息和娱乐的时间，劳动的供应是对休息时间的负需求，储蓄资金的供应也是资金的负需求。

消费者的预算约束为总支出等于总收入。支出总额为$p_1x_1+p_2x_2$，而收入为劳动的工资和储蓄利息之总和，设工资率为$p_3$，利率为$p_4$，则总收入为$p_3v_1+p_4v_2$。所以预算约束为

$$p_1x_1+p_2x_2=p_3v_1+p_4v_2 \tag{2.6.2}$$

将$v_1=-x_3$，$v_2=-x_4$代入上式则有

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4=0 \tag{2.6.3}$$

消费者的经济效果问题就是在上式约束下使效用函数式(2.6.1)最大化。我们可以作拉氏函数

$$L=U(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)+\lambda(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4) \tag{2.6.4}$$

最优经济效果的必要条件为

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\lambda p_1=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}+\lambda p_2=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}+\lambda p_3=0 \qquad (2.6.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_4}+\lambda p_4=0$$

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4=0$$

从（2.6.5）式可导出

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (2.6.6)$$

此式意味着商品之间的边际替代率等于其相应的价格比时，可达到最优经济效果。

从式（2.6.5）还有

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_3}}{\frac{\partial U}{\partial x_4}}=\frac{\frac{\partial U}{\partial v_1}}{\frac{\partial U}{\partial v_2}}=-\frac{dv_2}{dv_1}=-\frac{dx_4}{dx_3}=\frac{p_3}{p_4} \qquad (2.6.7)$$

此式意味着休息的舒服与持有现金的方便在取得同等效用上之边际替代率等于工资与利率之比率时，可达到最优经济效果，这等价于劳动和储蓄的边际替代率等于工资和利率之比率。增加劳动会使从休息中得到的效用减少，增加储蓄也会使用现金购买货物的方便（效用）减少，要维持效用不变，则增加劳动支出就要减少储蓄，边际替代率$-\frac{dv_2}{dv_1}$表示增加单位劳动支出时，要减少多少储蓄才能使效用不变。

从式（2.6.5）还有

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_3}}{\frac{\partial U}{\partial x_1}}=-\frac{dx_1}{dx_3}=\frac{dx_1}{dv_1}=\frac{p_3}{p_1};$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_3}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=-\frac{dx_2}{dx_3}=\frac{dx_2}{dv_1}=\frac{p_3}{p_2};$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_4}}{\frac{\partial U}{\partial x_1}}=-\frac{dx_1}{dx_4}=\frac{dx_1}{dv_2}=\frac{p_4}{p_1};\qquad(2.6.8)$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_4}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}=-\frac{dx_2}{dx_4}=\frac{dx_2}{dv_2}=\frac{p_4}{p_2}$$

如果称劳动和资金为初始资源，则式（2.6.8）说明商品和初始资源之间的边际替代率等于产品价格和初始资源报酬率之比时，可达到消费者最优经济效果。上式中$\frac{dx_i}{dv_j}$前面没有负号，意味着增加劳动支出会使效用减少，只有增加商品的消费量才能维持效用不变。而$\frac{dx_i}{dx_j}$之前有负号，意味着增加休息可以增加效用，所以要使效用不变，必须同时减少商品消费量。

从式（2.6.5）还有

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{p_1}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_3}}{p_3}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_4}}{p_4}=-\frac{\frac{\partial U}{\partial v_1}}{p_3}$$

$$=-\frac{\frac{\partial U}{\partial v_2}}{p_4}=\lambda \qquad (2.6.9)$$

上式意味着每增加一元支出用来购买不同商品所得的边际效用要相等且等于统一的支出的影子价格λ。同时放弃每元工资得到的休息（这就是用相当于工资的钱买休息时间）之边际效用也要等于λ，放弃每元利息得到的持有现金的方便效用也要等于λ，反之，意味着收入一元工资（与支出货币符号相反）使劳动增多，因而有一个负的边际效用，这个负边际效用的绝对值亦等于λ。同样，收入一元利息，用钱不方便的负边际效用的绝对值亦应等于λ。在这种情况下才能达到最优经济效果。

式（2.6.5）共有5个方程，若给定价格、工资率、利率，则只有5个未知变量 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，λ。从这些式子，我们可以将5个未知变量写成 $p_1$，$p_2$，$p_3$，$p_4$ 的函数，即

$$x_1=f^1(p_1, p_2, p_3, p_4) \qquad (2.6.10)$$

$$x_2=f^2(p_1, p_2, p_3, p_4) \qquad (2.6.11)$$

$$v_1=-x_3=f^3(p_1, p_2, p_3, p_4) \qquad (2.6.12)$$

$$v_2=-x_4=f^4(p_1, p_2, p_3, p_4) \qquad (2.6.13)$$

其中式（2.6.10）、式（2.6.11）为消费者对商品的需求函数。工资率 $p_3$ 和利率 $p_4$ 决定了消费者的收入，当 $p_1$，$p_2$ 上升时，需求量 $x_1$，$x_2$ 会下降。对于正常商品，$p_3$，$p_4$ 上升时，需求量 $x_1$，$x_2$ 亦会上升。式（2.6.12）、式（2.6.13）为劳动和资金的供给函数，当消费品价格 $p_1$，$p_2$ 上升时，初始资源 $v_1$，$v_2$ 的供给会下降，当工资 $p_3$ 上升时，劳动的供给会上升，当利率 $p_4$ 上升时，资金的供给会上升。

如果工资率太低，则消费者为了取得他本人的最优经济

效果，会增加休息，因为这时放弃每元工资增加休息的效用较高，这就会发生将闲暇替代工作的现象。如果利率太低，则消费者为了使其效用函数最大化，他会减少储蓄，增加手持现金或增加商品购买额。因为这时减少一元钱利息收益增加手持现金的方便效用较高，或减少二元利息收益而增加商品购买的边际效用较高，这就发生了消费与积累之间的替代问题。当然，这里假定了储蓄的动机只是为了取得利息，事实上往往还有其它的原因。

消费者的最优经济效果是非常复杂的问题，各人的嗜好不同，效用函数也不一样。对于每一个人都有千百种商品的最优购买比例问题，每个消费者时间有限，也有个工作和休息的最优比例问题，消费者资金有限，还有个消费和储蓄的最优比例问题。消费者往往根据他自己多年的生活经验，比较每元钱支出所增加的边际效用，反复调节各种商品的购买比例，使每元支出之边际效用相等。同时反复调节工作和休息的比例，使增加每元工作收入所减少的效用(由劳动增加、休息减少引起效用减少)等于每元购买商品支出增加的效用。如此复杂的消费者最优经济效果问题，只有消费者本人才清楚，因此不管什么社会制度，消费者最优经济效果问题只有分散决策才能最大限度地满足人民的需求。研究消费者最优经济效果问题并不是代替消费者决策，而是通过研究消费品的需求函数和劳动、资金的供给函数，来研究消费者追求最优经济效果的行为规律，通过价格与需求量及初始资源供给之间的反馈耦合来得到消费者最优经济效果的信息，以便最后解决消费者最优经济效果与生产者最优经济效果的协调问题（即一般均衡问题）。

## §2.7 多个消费者的最优经济效果问题

我们首先讨论两个消费者的最优经济效果问题，这种分析不难推广到多个消费者和多种商品的情形。

设有两个消费者，分别用上角1，2表示。他们消费两种商品，分别用$x$，$y$表示。两个消费者的效用函数分别为

$$U^1=U^1(x^1, y^1) \tag{2.7.1}$$

$$U^2=U^2(x^2, y^2) \tag{2.7.2}$$

其中$x^1$，$y^1$分别表示第一个消费者消费的两种商品的数量，而$x^2$，$y^2$分别表示第二个消费者消费的两种商品的数量。现在我们碰到了两人之间的效用不可比较，且各人都希望自己的效用达到最大的问题。由于各人的嗜好和价值标准不同，所以不同人的效用实际上不能相加减，克服这个困难的办法是假定一个消费者的效用取不同常数，然后分析在此约束下另一个消费者的效用极大化的相对条件，这就可以避开人与人的效用比较问题。于是多个消费者的最优经济效果问题就是将（2.7.2）中的$U^2$固定在常数水平，并加上商品总量约束

$$x^1+x^2=x_0 \tag{2.7.3}$$

$$y^1+y^2=y_0 \tag{2.7.4}$$

在这些约束条件下使（2.7.1）式极大化。

式（2.7.3)、式（2.7.4）可改写为

$$x^2=x_0-x^1,\quad y^2=y_0-y^1 \tag{2.7.5}$$

将上式代入式（2.7.2)，令$U^2=U_0^2$为一常数，则约束条件合并成一个：

$$U_0^2=U^2(x_0-x^1,\quad y_0-y^1) \tag{2.7.6}$$

作拉氏函数

$$L=U^1(x^1,y^1)+\lambda[U_0^2-U^2(x_0-x^1,y_0-y^1)] \quad (2.7.7)$$

目标函数极大化的一阶条件为

$$\begin{aligned} &U_x^1-\lambda U_x^2=0 \\ &U_y^1-\lambda U_y^2=0 \quad (2.7.8) \\ &U_0^2=U^2 \end{aligned}$$

其中 $U_x^1=\frac{\partial U^1}{\partial x^1}$， $U_x^2=\frac{\partial U^2}{\partial x^2}$， $U_y^1=\frac{\partial U^1}{\partial y^1}$， $U_y^2=\frac{\partial U^2}{\partial y^2}$。

式（2.7.8）的方程组中有三个未知数 $x^1$，$y^1$，$\lambda$，有三个方程，从中可以将 $x^1$，$y^1$，$\lambda$ 的最优解用 $U_0^2$ 表出。从式（2.7.8）还可导出

$$\frac{U_x^1}{U_y^1}=\left(-\frac{dy}{dx}\right)^1=\frac{U_x^2}{U_y^2}=\left(-\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (2.7.9)$$

其中$\left(-\frac{dy}{dx}\right)^1$ 为第一个消费者效用函数无差异曲线的边际替代率，$\left(-\frac{dy}{dx}\right)^2$ 为第二个消费者效用函数无差异曲线的边际替代率。此式说明多个消费者达到最优经济效果的条件是商品在不同消费者之间的分配方案必须使商品对于所有消费者的边际替代率都相等。

从前文单个消费者的最优经济效果的分析，我们知道个别消费者最优经济效果的条件为商品之间的边际替代率等于相应的商品价格反比，设 $x$ 的价格为 $p_x$，$y$ 的价格为 $p_y$，则这一条件与式（2.7.9）相结合则要求

$$\left(-\frac{dy}{dx}\right)^1=\frac{p_x}{p_y}=\left(-\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (2.7.10)$$

也就是说不同的消费者要面临着相同的比价才可能达到最优经济效果。如果存在价格歧视，或由于走后门、特权，同一种商品对不同人价格不同，则不可能达到最优经济效果。

下面我们用所谓"盒形图"和"契约曲线"来说明以上结论。图 2.9 中的 $O_1$ 是第一个消费者的原点，右上角的 $O_2$ 是第二个消费者的原点。$x_0$ 表示第一种商品的总量，$y_0$ 表示第二种商品的总量。盒形图中的任一点表示现有的 $x_0$，$y_0$ 在不同消费者之间的一种分配方案。例如点 Q 表示将 $x_0$ 分给第一个消费者 $O_1x^1$ 单位，分给第二个消费者 $O_2x^2$ 单位，其总和为 $O_1x^1+O_2x^2=x_0$；而将 $y_0$ 分给第一个消费者 $O_1y^1$ 单位，分给第二个消费者 $O_2y^2$ 单位，总和为 $O_1y^1+O_2y^2=y_0$。

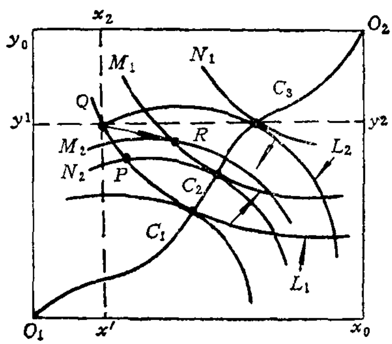



图 2.9

图中向 $O_1$ 凸出的曲线 $L_1$，$M_1$，$N_1$ 为第一位消费者的无差异曲线，向 $O_2$ 凸出的曲线 $L_2$，$M_2$，$N_2$ 为第二位消费者的无差异曲线。第一位消费者的无差异曲线越靠右上方效用水平越高，而第二位消费者的无差异曲线越靠左下方效用水平越高。

如果我们在$Q$点分配产品，这时第一个消费者取得无差异曲线$L_1$表示的效用水平，第二个消费者取得无差异曲线$L_2$表示的效用水平。若保持第一位消费者的效用水平不变，则第二位消费者还可以改进分配方案使其效用增加。例如在$P$点分配，这时第一位消费者的效用仍为$L_1$，而第二位消费者的效用从$L_2$提高到$N_2$。这种分配方案还不是最优的，仍可继续改进，例如沿无差异曲线$L_1$继续向右下方移动，即增加分配给第一位消费者的$x_0$，同时减少分配给第一位消费者的$y_0$，可以在不减少他的效用的前提下，继续提高第二位消费者的效用水平。直到$C_1$点，两位消费者的无差异曲线相切，不同商品对两位消费者的边际替代率都相等，这时达到最优经济效果。如果再改变分配方案不是会减少第一位消费者的效用就是会减少第二消费者的效用，即利己必须以损人为条件。这就是最优经济效果条件的式（2.7.9）的几何意义。

以上分析的实际经济意义可解释如下。由于效用函数是严格准凹的，无差异曲线向原点凸出，这意味着某种商品消费量越多，则它替代其它商品的能力越低，也就是说它的边际效用相对于其它商品的边际效用越低。所以当第一位消费者消费的$y$很多时，$y$对于他的边际效用越低，这时由于产品有限，第二位消费者消费的$y$很少，$y$对于他的边际效用较高；反过来，若第一位消费者消费的$x$很少，而第二消费者消费的$x$很多，那么$x$对前者的边际效用高，对后者的边际效用低，在这种情况下，就可以通过贸易，各人用自己过剩的商品（对自己的边际效用低，对他方的边际效用高）去交换自己短缺而他人过剩的产品（对自己的边际效用高而对他人的边际效用低），这就是使产品分配方案从$Q$变到$P$再

变到 $C_1$ 的意思。改变产品分配方案就是做买卖，即常说的"互通有无"。只要满足无差异曲线相切的条件，则这种买卖能在不增加产品的前提下，使一些人的效用在不减少他人效用的前提下最大化。也就是说商业虽然不直接创造产品，但是可以增加效用。这种理论是重商的，其基点立足于把各种经济因素如何最好地组合，因而可以用有限的资源使人民生活得更幸福。那么商业正是做这种最优化的工作，它虽不直接生产产品，但却通过要素组合的优化增加效用。这当然是花力小，效果大的经济潜力之所在。

如果第一位消费者的效用从 $L_1$ 变到 $M_1$，那么两人的无差异曲线在 $C_2$ 点相切，最优经济效果的分配方案由 $C_2$ 点确定；若第一位消费者的效用从 $M_1$ 提高到 $N_1$，则两人无差异曲线在 $C_3$ 点相切，最优经济效果的分配方案由 $C_3$ 点确定。总之我们在盒形图中可以找到无穷多个最优分配方案点，这些点可以连成图 2.9 中的**契约曲线** $O_1O_2$。这条曲线上的点都满足消费者最优经济效果的条件。可见消费者最优经济效果的方案不是唯一的，我们必须同时考虑生产者最优经济效果，才能最后确定唯一的最优经济效果分配方案。这就是后文中的一般均衡理论要解决的问题。

将图 2.9 中的一部分绘成图 2.10。我们可以进一步讨论所谓**经济核**问题。图 2.9 中 $C_1C_3$ 连成的线段为对于 $Q$ 点的经济核。如果初始分配方案是 $Q$ 点，那么，将 $Q$ 点朝核方向移动，则可以使双方的效用都增加，如果从 $Q$ 点沿无差异线朝核移动，则可以在不减少他人的效用前提下，增加某人的效用。如果 $Q$ 点朝反方向移动，则不是损人利己，就是损己利人，甚至可能损人不利己，例如 $Q$ 点移至 $K$ 点，这时第一位消费者的效用提高了，但第二位消费者的效

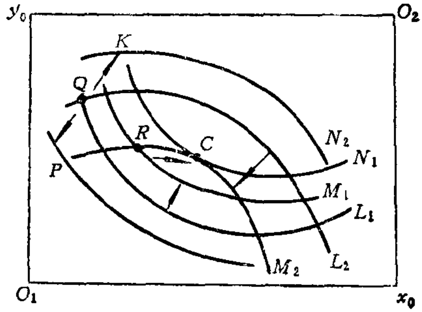



图 2.10

用却从 $L_2$ 降至 $N_2$，如果 $Q$ 点移至 $P$ 点，第二位消费者的效用虽提高了，但第一位消费者的效用却下降了。也就是说 $Q$ 点的移动表示分配方案的改变，这是通过商品交易实现的。朝核中心移动的商品交易都是互利的，而朝核外移动的交易至少有一方受损，这都不符合最优经济效果的要求。

这些经济规律，人们在日常生活中经常看到。例如内蒙古人民消费的牛羊肉多，吃的稻米少，牛羊肉对他们的边际效用低，稻米对他们的边际效用高，而对内地人民来说，情形正好相反，这就可以进行贸易，内蒙古人民可以用牛羊肉与内地人民换稻米，这种交易可以在不增加产品总量的条件下，使各方的效用增加，使人民过得更幸福。如果内蒙古人民和湖北人民面临的牛羊肉与稻米的比价不同，在内蒙古，牛羊肉相对于稻米较便宜，而在湖北牛羊肉相对于稻米较贵，那么这时商品的分配肯定不是最优的，我们可以通过贸易调济余缺，最后使所有人面临的价格比率相同，这时才能达到最优经济效果。所以各地同一种商品的差价越大，说明通过贸易（长途贩卖）提高人民生活水平（效用水平）的潜力越

大。只有当除掉运费因素后的各地价格水平都相等时，资源分配才能达到最优。换言之，在达到最优经济效果时，人们再不能通过贸易来增加各方的效用而不降低任何人的效用，也就是说不再存在投机倒把、套利的可能性。如果可以通过投机倒把牟取暴利，说明商品的分配还没有达到最优经济效果，这时就有必要有计划地组织大规模商品流通和贸易。一种经济活动，只要它不损害任何人的利益，而又给某一部分人带来利益，这就使整个社会的经济效益有所改善。违法的经济活动一般以损害别人的利益为特征。

## §2.8 动态需求系统

人们的嗜好会随时间变化，也就是说效用函数随时间变化，因此有必要将时间变量 $t$ 引入需求函数；人们的购买行为与人们对价格和收入的变化预期有关，这可以考虑将价格和收入的导数或差分引入需求模型；最后，某些商品的需求有明显的季节波动，即效用函数随季节而循环变化，这就有必要将周期波动因素引入需求模型。诸如此类的问题都要使需求函数显函时间因子，这就是动态需求函数。

如果人们的嗜好随时间单调变化，例如人们由于消费习惯的变化越来越不愿意穿胶鞋等等，则我们可以设计诸如下列需求模型

$$p_i x_i = a_i + b_i p + c_i M + d_i t \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.8.1}$$

或

$$x_i = \frac{a_i + b_i M + c_i t}{p_i} \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.8.2}$$

**例** 湖北省大中城市显含时间因素的需求系统为

| | |
|---|---|
| 食品 | $p_1x_1 = 0.7916 + 0.5118M + 0.3988\ t$ |
| 穿着 | $p_2x_2 = -1.235 + 0.1527M + 0.0195\ t$ |
| 日用品 | $p_3x_3 = -0.7021 + 0.1284M - 0.0970\ t$ |
| 文娱品 | $p_4x_4 = 0.4913 + 0.0701M - 0.2232\ t$ |
| 书报 | $p_5x_5 = -0.0513 + 0.0069M - 0.0030\ t$ |
| 医药 | $p_6x_6 = 0.1095 + 0.0111M + 0.0515\ t$ |
| 燃料 | $p_7x_7 = 0.3312 + 0.0105M - 0.0057\ t$ |
| 其它商品 | $p_8x_8 = -0.2537 + 0.0235M + 0.0291\ t$ |
| 非商品支出 | $p_9x_9 = 0.5224 + 0.0775M - 0.1742\ t$ |

这就是式（2.8.2）那样的显含时间因素的需求系统，时间 $t$ 的系数反映了嗜好的变化，即效用函数随时间的变化。上述模型中$M$为人均消费支出，$p_ix_i$ 为人均 $i$ 类消费支出金额，$t$ 为季度数。

这种需求系统要满足加总条件，则要求

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = 0 \qquad (2.8.3)$$

上述例中的

$$\sum_{i=1}^{9} a_i = 0.0041, \quad \sum_{i=1}^{9} b_i = 0.9925,$$

$$\sum_{i=1}^{9} c_i = -0.0042$$

近似满足加总条件，可见湖北省大中城市消费者行为规律与这种动态需求系统拟合得非常好。如果不引入时间因素 $t$，湖北省大中城市的消费者数据做出的LES模型与加总条件相差太远。

如果需求有明显的周期振荡，而收入和价格都没有这种周期振荡，则我们可以将这种周期振荡归结为嗜好即效用函数的周期变化，我们可以考虑采用类似下式的模型来描述这种规律。

$$x_i = a_{0i} + a_{1i}p_1 + \cdots + a_{ni}p_n + b_iM + A_i\sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (2.8.4)$$

其中周期因子$A_i\sin(\omega_i t+\phi_i)$中的参数$A_i$是振荡的振幅，用回归方法算出。$\omega_i$为振荡的频率参数。若振荡周期为$T$，由于正弦函数的周期为$2\pi$，而$\sin(\omega_i t+\phi_i)$的周期主要由$\omega_i t$决定，令$t=T$，则

$$\omega_i T = 2\pi, \quad 即\omega_i = \frac{2\pi}{T} \quad (2.8.5)$$

只要知道周期$T$，则不难算出参数$\omega_i$。

$\phi_i$为初相位，它由振荡的高峰时刻$t^*$确定。由于正弦函数在 $\sin\frac{\pi}{2}$ 达到峰值，所以令

$$(\omega_i t^* + \phi_i) = \frac{\pi}{2}$$

则可解出

$$\phi_i = \frac{\pi}{2} - \omega_i t^* = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t^* \quad (2.8.6)$$

只要给定周期$T$和峰值时间$t^*$，则可算出参数$\phi_i$。

**例** 武汉市的猪肉需求函数为

$$x = 12.3146 - 10.6184p + 0.2581M + 1.6983\sin(1.57t + 0.7857)$$

其中$p$为猪肉价格，$M$为每季人均收入，$x$为每季人均消费猪肉斤数，$t$为季度数。振荡周期为4个季度，即一年。将$T=4$代入式（2.8.5），可算出

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3.1416}{4} = 1.57$$

根据统计数据，猪肉需求高峰在一季度中期，即春节前后，令 $t^* = 0.5$季，和 $T = 4$ 一块代入式（2.8.6），则可算出

$$\phi_i = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} t^* = 0.7857$$

确定参数 $\omega$ 和 $\phi$ 后，我们将季度数据 $t$ 代入 $\sin(1.57t + 0.7857)$ 处理后就可以与需求量 $x$，价格 $p$ 和收入 $M$ 的数据回归，算出振幅参数

$$A_i = 1.6983$$

如果价格上升，则人们对未来的价格将作出预期，预期未来价格会比现在高，所以反而会增加目前的购买量，以便在价格上升之前购买较多的商品，这正好与当前价格水平对需求的影响相反。当前价格越高，购买量会越少，而价格上升速度越高，当前购买量反而会越多。

反过来若价格下降，则人们预期未来价格将比目前价格低，所以会减少目前的购买量，尽量等到价格降到更低水平时再增加购买。这也与当前价格水平对需求的影响相反。当前价格越低，购买量越多，但价格下降速度越快，则当前购买量越少。

价格变化速度可用价格对时间的变化率 $\frac{dp}{dt}$ 表示，也可以用价格的一阶差分 $\Delta p$ 表示，所以上述规律可写为

$$x = f\left(p, M, \frac{dp}{dt}\right) \tag{2.8.7}$$

或

$$x = f(p, M, \Delta p) \tag{2.8.8}$$

记 $\dot{p}=\frac{dp}{dt}$，则上列二式按照预期理论的假定，应满足

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{p}}>0, \quad \frac{\partial x}{\partial \Delta p}>0 \tag{2.8.9}$$

若 $\dot{p}>0$，或 $\Delta p>0$，意味着价格上升，所以上式在这种情况表示当前需求 $x$ 上升；若 $\dot{p}<0$ 或 $\Delta p<0$，意味着价格下降，令价格下降幅度为 $|\dot{p}|$ 或 $|\Delta p|$，则式（2.8.9）可写为

$$-\frac{\partial x}{\partial|\dot{p}|}>0, \quad 即 \frac{\partial x}{\partial|\dot{p}|}<0$$

或

$$-\frac{\partial x}{\partial|\Delta p|}>0, \quad 即 \frac{\partial x}{\partial|\Delta p|}<0 \tag{2.8.9$'$}$$

上式说明降价幅度越大，当前需求量越小。

人们对自已的收入 $M$ 也有预期，若收入增加，即 $\dot{M}=\frac{dM}{dt}>0$，则预期未来收入高于当前水平，当前可以多买一些东西，如果收入减少，即 $\dot{M}<0$，预期未来收入水平比现在低，当前的购买量一般会降低。所以我们亦可将收入的导数 $\dot{M}$ 或差分 $\Delta M$ 引入模型，例如

$$x=f(p, \dot{p}, M, \dot{M})$$

或

$$x=f(p, \Delta p, M, \Delta M) \tag{2.8.10}$$

根据上述预期理论的假定，式（2.8.10）应满足

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{M}}>0, \quad 或 \quad \frac{\partial x}{\partial \Delta M}>0 \tag{2.8.11}$$

我们可以将所有商品的价格都引入需求函数，令 $\boldsymbol{X}=(x_1, \cdots, x_n)'$ 为 $n$ 种商品的需求列向量，$\boldsymbol{P}=(p_1, \cdots, p_n)$ 为相应的价格行向量，$\dot{\boldsymbol{P}}=(\dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_n)$ 为价格变化速率行向量，

$F=(f_1,\cdots,f_n)'$为函数列向量，则有动态需求系统

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P},\dot{\boldsymbol{P}},M,\dot{M},\ t\ ) \qquad (2.8.12)$$

其中$M$为收入变量，$\dot{M}$为收入变化率。这是一个一阶微分方程组。

若令$\Delta\boldsymbol{P}=(\Delta p_1,\cdots,\Delta p_n)$为价格变化行向量，即价格的一阶差分向量，$\Delta M$为收入的变化量，则动态需求系统可写为差分方程组

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{P},\Delta\boldsymbol{P},M,\Delta M,\ t\ ) \qquad (2.8.13)$$

**例** 荷花牌洗衣机的需求函数为

$$x=15033.4727+82.2253\,t-102.8524\,p$$
$$+0.5151M+19.6322\Delta p$$

其中$t$为月数，$p$为洗衣机价格，$M$为月收入，$\Delta p$为价格变化量，$x$为每月需求量。$p$的系数$-102.8524$说明价格下降1元每月可多销102.8524台洗衣机。每月总收入增加1万元，可多销0.5151台洗衣机，价格上升幅度$\Delta p$增加1元，可使当月销量增加19.6322台，价格下降幅度增加1元，反会使当月销量减少19.6322台。$t$的系数说明价格、收入价格变动幅度之外的因素，例如消费习惯，产品质量、广告、商誉对需求的影响。这个模型满足

$$\frac{\partial x}{\partial\Delta p}>0$$

这就实证地验证了预期理论。

由于这种线性需求函数不满足加总性和0阶齐次性，所以只能当收入和价格在一定范围内变化时才能近似描述洗衣机这一种商品的需求规律。

# 第三章　生产者的最优经济效果

## §3.1　投入产出生产函数

要研究生产者的最优经济效果问题，首先要研究生产的技术经济条件，也就是说生产某种产品，需要投入多少各种生产资料和劳动。一般我们用生产函数来描述这种技术经济条件。生产函数有线性生产函数，投入产出生产函数。Cobb-Douglas生产函数。活动分析生产函数。有理分式生产函数及CES生产函数等等。其中用得最多的是投入产出生产函数。Cobb-Douglas生产函数，活动分析生产函数和CES生产函数。下面我们分节介绍这些生产函数。

投入产出生产函数假定各种生产资料投入之间完全没有替代弹性，生产某种产品所需的各种投入量由固定的投入系数即我们所说的消耗定额确定。这种生产函数适于用来描述大石油化工企业、大冶金企业的技术经济条件，也比较适合描述中间产品生产的技术经济条件，特别是由于投入产出的线性假定，大大简化了经济分析（这以与实际近似程度降低为代价），因而便于将复杂的分工协作关系变成简单的线性代数问题。经验证明，在一定的短时期内，同样经济发展水平的国家或地区，尽管其社会制度等条件千差万别，但是投入产出系数矩阵却非常接近。不过对于初始资源或互相替代能力很大的生产资料，这种生产函数却不适用。

设产出量为 $q$，每产出 1 单位 $q$ 要消耗$c_1$单位投入$x_1$和$c_2$单位 $x_2$，那么投入 1 单位$x_1$最大可能产出的 $q$ 量为$\frac{1}{c_1}$，

而投入1单位$x_2$最大可能产出的$q$量为$\frac{1}{c_2}$。由于两种投入互相不具备替代的可能性，所以二者只有等比例增加才能使产出等比例增加，也就是说增加得最少的投入决定了产出的增加比例，于是投入产出生产函数（又称列昂节夫型生产函数）为

$$q = \text{Min}\left(\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right) \tag{3.1.1}$$

根据第一章§1-8的定义，设$Y=(y_1, \cdots, y_n)'$为最终产品列向量，$X=(x_1, \cdots, x_n)'$为总产出列向量，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$为投入系数矩阵，则$AX$为中间消耗列向量。由于总产出$X$为中间消耗$AX$与最终产出$Y$之和，所以我们有开放的投入产出系统

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{Y} \tag{3.1.2}$$

解出$X$，则

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Y} \tag{3.1.3}$$

设有无穷等比级数

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m+\cdots \tag{3.1.4}$$

两边乘以$A$得

$$\boldsymbol{AF}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots+\boldsymbol{A}^{m+1}+\cdots \tag{3.1.5}$$

用式（3.1.4）减式（3.1.5），则得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{m+1}$$

即

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{m+1}) \tag{3.1.6}$$

若$A$的各元数小于1大于或等于0，则当$m\to\infty$时，$A^{m+1}\to 0$，所以上式的极限值为

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{F} = \lim_{m\to\infty} (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m)$$
$$=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} \qquad (3.1.7)$$

可见列昂节夫递阵可展成无穷级数式（3.1.4），用$\boldsymbol{F}$左乘$\boldsymbol{Y}$，则有

$$\boldsymbol{FY}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y}+\cdots+\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{Y}+\cdots \qquad (3.1.8)$$

其中$\boldsymbol{Y}$为最终产品量，$\boldsymbol{AY}$为产出$\boldsymbol{Y}$量最终产品直接消耗的中间产品，而$\boldsymbol{AAY}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{Y}$为由分工协作的交互依赖关系产生的第一轮间接消耗，$\boldsymbol{AAAY}=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{Y}$为第二轮间接消耗。所以从式（3.1.8）等式右边第二项之右求和，得到的

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m+\cdots)\boldsymbol{Y} \qquad (3.1.9)$$

为产出$\boldsymbol{Y}$单位产品所要消耗的全部中间产品，因此

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m+\cdots=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}$$
$$=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I} \qquad (3.1.10)$$

叫**完全消耗系数矩阵**，其中$\boldsymbol{I}$为$n\times n$单位矩阵。

而

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots+\boldsymbol{A}^m+\cdots=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$$
$$=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} \qquad (3.1.11)$$

叫**间接消耗系数矩阵**，它与**直接消耗系数矩阵**$\boldsymbol{A}$之和就是完全消耗系数矩阵。

投入产出法可以用来计算考虑到完全消耗的劳动价值或成本价格或生产价格。由于投入产出考虑到分工协作的无穷多次直接间接依赖关系，所以它可以计算出一种价格变动引起的轮番提价这类后果。例如猪肉提价，所有吃猪肉的人的工资都要涨，因此他们的产品成本上升，造成要求提价压力，而养猪的人又要消费这些人的产品，因而使养猪成本上升，造成要求猪肉进一步提价的压力。当然由于投入产出系数矩

阵元素全小于0，这类间接影响会越来越小，也就是说轮番提价过程是收敛的，因为无穷级数式（3.1.4）是收敛的。设劳动消耗系数向量为$\boldsymbol{a}_0=(a_{01},\cdots a_{0n})'$，工资率为$w$，则价格系统可写为

$$\boldsymbol{P}=A'\boldsymbol{P}+w\boldsymbol{a}_0 \tag{3.1.12}$$

对于三部门的情形，上式可写为

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix} \tag{3.1.13}$$

或展开为

$$\begin{aligned} p_1&=a_{11}p_1+a_{21}p_2+a_{31}p_3+a_{01}w \\ p_2&=a_{12}p_1+a_{22}p_2+a_{32}p_3+a_{02}w \\ p_3&=a_{13}p_1+a_{23}p_2+a_{33}p_3+a_{03}w \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

$a_{11}, a_{21}, a_{31}$为部门1生产单位产出要消耗的1，2，3部门的产品量，$p_1, p_2, p_3$分别为三部门产品价格，因此$a_{11}p_1+a_{21}p_2+a_{31}p_3$为生产资料成本，$a_{01}$为部门1生产单位产品要消耗的劳动量，$w$为工资率，所以$a_{01}w$为工资成本，部门1产品的价格$p_1$等于生产资料成本与工资成本的总和。

式（3.1.13）可写为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}')^{-1}w\boldsymbol{a}_0 \tag{3.1.15}$$

只要外生给定工资率$w$则可解出价格向量$\boldsymbol{P}$。这是一种考虑到轮番提价后果的均衡价格，而不仅是用现有产品成本算出的价格。

如果令剩余价值率为$r_1$，将$(1+r_1)=w$代入式(3.1.15)则可算出劳动价值（用消耗的劳动时间表示）

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}')^{-1}(1+r_1)\boldsymbol{a}_0 \tag{3.1.16}$$

设每部门产出单位产品消耗资金的系数向量为$\boldsymbol{K}=(k_1, \cdots, k_n)'$，给定资金利润率$r_2$，则可算出生产价格

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}')^{-1}(1+r_2)\boldsymbol{K} \tag{3.1.17}$$

值得注意的是，如果$A$为价值形态投入产出系数矩阵而不是实物形态的投入产出系数矩阵，且式（3.1.15）中的向量$a_0$也是用工资与部门产值之比来表示，那么算出的$\boldsymbol{P}$就是一种用来修正现价的价格指数。因为$A$和$\boldsymbol{a}_0$都是用现价算出来的价值系数，所以待求的修正指数$\boldsymbol{P}$用$\boldsymbol{A}'$左乘后就得到修正后的用均衡价格表示的成本。因此可算出价格指数

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{a}_0 \tag{3.1.18}$$

其中$a_0$就是各部门单位产值占用的工资系数向量。这种算法比用实物投入产出矩阵算价格水平要好得多。因为一个社会有上千万种以上的产品，不可能搞如此之大的实物投入产出表，如果只搞 1000×1000 的实物投入产出表，则要丢掉很多产品，所以用它求出的列昂节夫递阵也不可能包括所有完全消耗。而用价值形态投入产出系数矩阵就不会漏掉产品。我们算出每个部门产品的价格修正指数后可以参照现价算出每部门产品的合理价格水平，再在部门内进行分解，用加权平均的方法将部门价格水平换算成具体产品的价格水平。

## §3.2 Cobb-Douglas和CES生产函数

实际生产活动中，很多生产过程的投入生产要素之间存在着替代性。例如，发一千瓦小时电，可以烧煤，而不烧油（或少烧油），也可以烧油而不烧煤（或少烧煤）。生产成衣可以用资本密集的技术，也可以用劳力密集的技术。一般我们用齐次函数来描述这种投入的替代特性。

齐次函数的定义是，若有函数

$$y = f(x_1, x_2) \tag{3.2.1}$$

自变量$x_1, x_2$各自乘上常数λ，则原函数变成

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{m+n} y \tag{3.2.2}$$

这种函数 $y = f(x_1, x_2)$ 叫$m + n$阶齐次函数。

例如

$$y = x_1^m x_2^n$$

则
$$(\lambda x_1)^m (\lambda x_2)^n = \lambda^{m+n} x_1^m x_2^n = \lambda^{m+n} y$$

所以$y$是$m + n$阶齐次函数。

当$m + n = 1$时，齐次函数叫线性齐次函数。当$m + n = 0$时，叫0阶齐次函数。例如上一章我们曾讲到需求是所有商品价格和收入的0阶齐次函数，意即所有商品价格和收入都增加λ倍，则需求增加到$\lambda^0 = 1$倍，即保持不变。下面的函数都是齐次函数

$$y = ax_1 + bx_2, \qquad y = ax_1^b x_2^c,$$

$$y = \sqrt{ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2}, \qquad y = \frac{ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2}{cx_1 + dx_2}$$

$$y = r(\delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho})^{-1/\rho}$$

关于齐次函数有所谓Euler定理。

若$y = f(x_1, x_2)$为$r$阶齐次函数，则

$$y = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} x_2\right) \tag{3.2.3}$$

对于线性齐次函数（$r = 1$），我们可简洁地证明以上定理，即证明

$$y = \frac{\partial y}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} x_2 \tag{3.2.4}$$

令$y = f(x_1, x_2)$为线性齐次函数，则

$$\lambda y = f(\lambda x_1, \lambda x_2) \tag{3.2.5}$$

如果，$x_1, x_2$ 都乘上 $\frac{1}{x_2}$，根据一阶齐次函数的定义，则

$$\frac{1}{x_2}y = f\left(\frac{x_1}{x_2},\ 1\right) \tag{3.2.6}$$

即

$$y = x_2 f\left(\frac{x_1}{x_2},\ 1\right) \tag{3.2.7}$$

令

$$h\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f\left(\frac{x_1}{x_2},\ 1\right) \tag{3.2.8}$$

则

$$y = x_2 h\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{3.2.9}$$

将 $y$ 分别对 $x_1, x_2$ 求偏导数，我们有

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\frac{1}{x_2} = h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_2} &= x_2 h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right) + h\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\\ &= -\frac{x_1}{x_2}h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + h\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

将式（3.2.10）乘上 $x_1$，式（3.2.11）乘上 $x_2$ 相加，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}x_2 &= x_1 h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + x_2\left[-\frac{x_1}{x_2}h'\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right.\\ &\quad \left. + h\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right] = x_2 h\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = y\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

证毕。

一般齐次函数有下列性质：

若 $y = f(x_1, x_2)$ 为 $r$ 阶齐次函数，则

（1）$y = x_1^r \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = x_2^r \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ （3.2.13）

（2）$\frac{\partial y}{\partial x_1}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ 是 $r-1$ 阶齐次函数 （3.2.14）

（3） $ry=\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}x_2$ (3.2.15)

（4） $r(r-1)y=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}x_1^2+2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}x_2^2$

(3.2.16)

对于线性齐次函数来说，以上性质变成

（1） $y=x_1\phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=x_2\psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ (3.2.17)

（2） $\frac{\partial y}{\partial x_1}$和$\frac{\partial y}{\partial x_2}$为0阶齐次函数，即它们都是比率$\frac{x_2}{x_1}$的函数，$x_1$，$x_2$同时扩大λ倍时，$\frac{\partial y}{\partial x_1}$，$\frac{\partial y}{\partial x_2}$都不变；

(3.2.18)

（3） $y=\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}x_2$ (3.2.19)

（4） $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}=-\frac{x_2}{x_1}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$，$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}=-\frac{x_1}{x_2}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$

(3.2.20)

设劳力的投入量为$L$，固定资产的投入量为$K$，则总产出可写成Cobb-Douglas生产函数

$$Y=AL^{\alpha}K^{\beta} \quad (3.2.21)$$

$A$为大于0的常数，α为产出对劳力的弹性参数，即$\alpha=\frac{\partial Y}{\partial L}\frac{L}{Y}$，β为产出的资本弹性参数，即$\beta=\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K}{Y}$。若$\alpha+\beta=1$，式(3.2.21)为一阶齐次函数，即投入$L$，$K$都增加λ倍，总产出$Y$亦增加λ倍，这意味着，生产规模扩大后，投入与产出的比率关系仍不变，因而叫做**规模报酬不变**，若$\alpha+\beta>1$，则存在**规模报酬递增**的特点，若$\alpha+\beta<1$，则存在**规模报酬递减**的特点。

为了描述生产函数的规模报酬特点，我们引入生产弹性概念。**生产弹性**定义为，当投入都增为λ倍时，产出 $y = f(\lambda x_1, \lambda x_2)$ 对增加倍数λ弹性的极限，即生产弹性为

$$\varepsilon = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial \lambda} \frac{\lambda}{f(\lambda x_1, \lambda x_2)}$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial \ln f(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial \ln \lambda} \tag{3.2.22}$$

不难计算Cobb-Douglas生产函数的生产弹性为

$$\varepsilon = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial \ln \{A(\lambda L)^{\alpha}(\lambda K)^{\beta}\}}{\partial \ln \lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial \{\ln A + \alpha \ln \lambda + \alpha \ln L + \beta \ln \lambda + \beta \ln K\}}{\partial \ln \lambda}$$

$$= \alpha + \beta \tag{3.2.23}$$

规模报酬不变的生产函数，其生产弹性 $\varepsilon = 1$，规模报酬递增的生产函数，其生产弹性 $\varepsilon > 1$，规模报酬递减的生产函数，其生产弹性 $\varepsilon < 1$。

将 $f(\lambda x_1, \lambda x_2)$ 对λ求偏导数，我们有

$$\frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_1)} \frac{\partial (\lambda x_1)}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_2)} \frac{\partial (\lambda x_2)}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_1)} x_1 + \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_2)} x_2 \tag{3.2.24}$$

将上式代入式（3.2.22），于是可将生产弹性写为

$$\varepsilon = \lim_{\lambda \to 1} \left[\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_1)} x_1 + \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_2)} x_2\right] \frac{\lambda}{f(\lambda x_1, \lambda x_2)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1}{f} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{x_2}{f} = \alpha + \beta \qquad (3.2.25)$$

其中$\alpha$为$x_1$的产出弹性，$\beta$为$x_2$的产出弹性。由于Cobb-Douglas生产函数的劳动弹性为$\alpha$，资本弹性为$\beta$，所以其生产弹性为$\alpha+\beta$。

Cobb-Douglas生产函数除生产弹性为$\alpha+\beta$外，还有如下特性，若$\alpha+\beta=1$，则

（1）$\lim\limits_{K\to 0} AL^{\alpha}K^{\beta}=0$，$\lim\limits_{L\to 0} AL^{\alpha}K^{\beta}=0$

（2）对于大于0的$L$，$\lim\limits_{K\to\infty} AL^{\alpha}K^{\beta}=\infty$

对于大于0的$K$，$\lim\limits_{L\to\infty} AL^{\alpha}K^{\beta}=\infty$

（3）
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \partial A\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = (1-\alpha)A\left(\frac{K}{L}\right)^{-\alpha} \qquad (3.2.26)$$

即边际产出率只与$K$与$L$的比率有关。若$K$与$L$同时扩大到$\lambda$倍，$\frac{\partial Y}{\partial L}$，$\frac{\partial Y}{\partial K}$不变。若$K$与$L$的比率(人均资本拥有量)提高了，则$\frac{\partial Y}{\partial L}$将提高。对于所有大于0的$K$和$L$，$\frac{\partial Y}{\partial K}>0$，$\frac{\partial Y}{\partial L}>0$，但若$L\to 0$，则$\frac{\partial Y}{\partial L}\to\infty$，若$K\to 0$，则$\frac{\partial Y}{\partial K}\to\infty$。其经济学意义是，若劳动几乎是0，而资本很多，则增加一点人力，可以使产出增加极大。当资本几乎等于0，人力很多时，增加一点资本，可以使产出增加很多。

（4）
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}=\alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{1-\alpha}<0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}=-\alpha(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha-1}<0 \qquad (3.2.27)$$

即，当一种要素为不变常数时，另一种要素不断增加，其边际产出是递减的。

（5）劳力之平均产出为

$$\frac{Y}{L}=AL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} \qquad (3.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{Y}{L}\right)=(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{1-\alpha}<0 \qquad (3.2.29)$$

即当$K$不变时，人均产量是递减的。将（3.2.28）式与（3.2.26）式比较，易知劳力的边际产出为人均产出的$\alpha$倍，而资本的边际产出为资本平均产出的$\beta$倍。

（6）以后我们将证明，各种生产要素所获得的报酬率等于此种要素的边际生产率，是生产达到最优经济效果的必要条件，在这种条件下劳动的收入为$\frac{\partial Y}{\partial L}\cdot L$，资本的收入为$\frac{\partial Y}{\partial K}\cdot K$，根据欧拉定理，不难看出，总收入

$$Y=\frac{\partial Y}{\partial L}L+\frac{\partial Y}{\partial K}K \qquad (3.2.30)$$

由于
$$\frac{\partial Y}{\partial L}L=\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}L=\alpha Y \qquad (3.2.31)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K}K=\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}K=\beta Y \qquad (3.2.32)$$

所以劳动收入占总收入的比重为

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}L}{Y}=\frac{\alpha Y}{Y}=\alpha \qquad (3.2.33)$$

资本收入占总收入的比重为

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}K}{Y}=\frac{\beta Y}{Y}=\beta \qquad (3.2.34)$$

这两个比例只与α与β有关，而与$L,K$的数量和比例无关。用计量经济学的统计方法表明，Cobb-Douglas生产函数很好地描述了很多资本主义国家的生产行为，企业由于追求利润，又经常运行在最优点上，所以近年来资本相对于劳力虽然有很大增长，但资本与劳动收入占总收入的比重却变化不大。

（7）设产出$Y$取常数水平$Y_0$，则Cobb-Douglas生产函数可写成隐函数形式

$$f(L,K)=AL^{\alpha}K^{\beta}-Y_0=0 \qquad (3.2.35)$$

根据隐函数求导法则，我们可求出$K$对$L$的导数

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{\partial f}{\partial L}\Big/\frac{\partial f}{\partial K}=-\frac{\alpha K}{\beta L} \qquad (3.2.36)$$

这叫做**边际替代率**，一般用$s$表示，有的文献取$\frac{dK}{dL}$的绝对值等于$s$，有的记为$s=-\frac{dK}{dL}$。其经济意义为，当产出为常数水平时，我们可以多投入$L$，少投入$K$；亦可以多投入$K$，少投入$L$，因为投入之间有替代性。边际替代率表示，若增加微小量$L$，可以减少多少$K$而使产出$Y$不变，它反映了$L$代替$K$的能力的大小。式（3.2.36）也可以视为一个微分方程，它反映了所谓等产量曲线的特性。

Cobb-Douglas生产函数是种二元函数，它不能在二维平面中描绘，而必须借助三维空间才能表现出来。现在我们来作这个三维空间曲面图。首先，当$K\to 0$，$L\to 0$时，$Y\to 0$，所以这个曲面是通过原点的；又由于$K>0$，$L>0$，$Y>0$，且$K\to\infty$，$L\to\infty$时，$Y\to\infty$，所以这个曲面是在第一卦限的一座不断升高的山坡表面，如图 3.1 所示。由于$K$，$L$增加$\lambda$倍，$Y$亦增加$\lambda$倍（1 阶齐次函数），所以曲面是由射线组成的锥面。如果$\alpha+\beta<1$，则曲面是向下凹的曲线组成的曲面，如果$\alpha+\beta>1$，则是向上凹的曲面。用$Y=Y_1$，$Y=Y_2$，$Y=Y_3$的平行于$LK$平面的平面截曲面，可以得到等高曲线$l_1, l_2, l_3$，它们分别表示不同的投入$L$和$K$的组合可达到的相同的产量水平。等高线在平面的投影叫做**等产量线**，它相当于效用函数的无差异曲线，

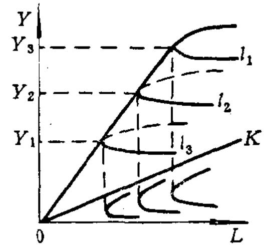



图 3.1

等产量线上任一点的切线斜率就是边际替代率$s=-\frac{dK}{dL}$。

（8）为了进一步描述等产量线的曲率特性，同时为了分析各种生产函数特性对收入分配的影响及生产者选择投入最优比例与投入比价的关系，我们有必要引入**替代弹性**概念。

$\frac{\partial Y}{\partial K}$是固定资产创造的边际收益，$\frac{\partial Y}{\partial L}$是劳动创造的边际收益，这也是各种投入对产出增加的贡献，因而将$\frac{\partial Y}{\partial K}$作为固定资产的价格，将$\frac{\partial Y}{\partial L}$作为工资率是合理的。下文中我们将证明投入的价格等于投入创造的边际收益这是达到最优经济效果的必要条件，也是整体最优经济效果与局部最优经

济效果协调，生产者最优经济效果与消费者最优经济效果协调的条件，因此我们令资本的价格 $p_k=\frac{\partial Y}{\partial K}$，劳动的工资率 $p_L=\frac{\partial Y}{\partial L}$。

根据产量不变条件下资本和劳动可以互相替代的假设，可得两种投入的比价为

$$\frac{p_L}{p_K}=\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}}=-\frac{dK}{dL}=s \qquad (3.2.37)$$

令两种投入的比率为

$$r=\frac{K}{L} \qquad (3.2.38)$$

当两种投入的比价 $s$ 变化时，生产者为了使利润最大化，就会利用投入之间的替代作用，尽量用比价下降的投入代替比价上升的投入，因而使投入的最优比例 $r$ 变化。投入比例 $r$ 对投入比价 $s$ 的弹性，表示投入比价变动10/0，使利润最大化的投入比例 $r$ 会变动百分之几。由于 $r$ 对 $s$ 的弹性反映了比价变动时一种投入代替另一种投入的能力，所以定义为替代弹性。设 $\Delta r=\Delta\frac{K}{L}$，$\Delta s=\Delta\frac{dK}{dL}$，则替代弹性为

$$\sigma=\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta r\to 0}}\frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta s}{s}}=\lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ \Delta r\to 0}}\frac{\Delta r}{\Delta s}\frac{s}{r}$$

$$=\frac{dr}{ds}\frac{s}{r}=\frac{d(\ln r)}{d(\ln s)} \qquad (3.2.39)$$

由于
$$\sigma=\frac{d(\ln r)}{d(\ln s)}=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{dK}{dL}\right)}\frac{\frac{dK}{dL}}{\frac{K}{L}}$$

$$=\frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{d\left(\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}}\right)}\frac{\frac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial K}}}{\frac{K}{L}} \qquad (3.2.39')$$

中包含高阶导数，所以它与无差异曲线的曲率特性有关。

式（3.2.39）可改写为

$$\sigma=\frac{dr}{ds}\frac{s}{r}=\frac{d\frac{K}{L}}{d\frac{p_L}{p_K}}\frac{\frac{p_L}{p_K}}{\frac{K}{L}}=\frac{dp_KK}{dp_LL}\frac{p_LL}{p_KK}$$

$$=\frac{\frac{dp_KK}{p_KK}}{\frac{dp_LL}{p_LL}}\approx\frac{\frac{\Delta(p_KK)}{p_KK}}{\frac{\Delta(p_LL)}{p_LL}}。$$

其中$p_KK$为资本收入，$\frac{dp_KK}{p_KK}$为资本收入增长率；$p_LL$为劳动收入，$\frac{dp_LL}{p_LL}$为劳动收入增长率。所以替代弹性σ又决定了各种要素收入增长率的比率。若σ＝1，则两种要素的收入增长率相等，资本收入（利润、利息等）和劳动收入(工资)的比率不会变化，若σ＞1，则资本收入比重将上升，若σ＜1，则资本收入比重将下降。

在有效率竞争的条件下，由于要素价格等于其边际收益，则我们不必做式（3.2.21）那样的经济计量模型，而只要利用投入比价变动比率$\frac{ds}{s}$和投入比率的变动比率$\frac{dr}{r}$的数据就可以计算出替代弹性$\sigma$。

如果不存在有效率竞争，则我们可以做出生产函数经济计量模型，然后算出相应的替代弹性$\sigma$。这一方面可以使企业根据资本与劳动的比价变动，来调节资本与劳动的投入比率以使利润最大化；另一方面，若做出了全社会的生产函数，则要使投入达到最优比例，我们可以根据替代弹性算出投入比价的最优变动比率。

例如，我们若要在工资率相对于利率上升时保持利润最大化，则应减少劳动的投入而增加资本投入。若替代弹性为1，则当工资率与利率的比率上升1％时，资本投入与劳动投入的比率也要上升1％。若利率相对于工资率上升了1%，则应减少资本的使用而增加劳动投入比重才能使利润最大化，即应使资本投入与劳动投入的比率下降1％。

如果上级要鼓励大家多用劳动，而节约资本，则应该提高资本与劳动的比价，这可以提高利率或降低工资率来达到。如果上级要鼓励大家采用资本密集的新技术，而节约劳动，则应该降低资本与劳动的比价，即降低利率或提高工资率。类似地，若上级要鼓励大家多用煤，少用油，则应该降低煤与油的比价，若要鼓励大家采用节约能源的新技术，则应该提高能源与新技术的比价。究竟提高多少，可以利用替代弹性计算。例如，要使劳动与资本的比率提高2％，则在替代弹性为2时，应该降低劳动与资本的比价1％。

对于$\alpha+\beta=1$的Cobb-Douglas生产函数来说，从式（3.2.36）知

$$r = \frac{K}{L} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{dK}{dL} = \frac{\beta}{\alpha}s$$

所以其替代弹性为

$$\sigma = \frac{d(\ln r)}{d(\ln s)} = \frac{d\left(\ln\frac{\beta}{\alpha} + \ln s\right)}{d(\ln s)} = 1 \qquad (3.2.40)$$

也就是说Cobb-Douglas生产函数的生产要素之间的替代弹性恒为1，这是与规模报酬不变的特点相对应的。由于替代弹性的经济意义可解释为资本的收入增长率（即利税增长率）与劳动的收入增长率（即工资增长率）之比，所以$\sigma = 1$意味着资本收入与劳动收入的比率不会变化。

由于Cobb-Douglas函数不但可以作生产函数，还可以作效用函数或需求函数，因此上述关于此种函数特性的讨论可以广泛应用于效用函数和需求函数的研究。

生产函数不但能用来描述生产的技术经济条件，还可以用来进行经济效果的要素分解。例如我们可以将时间因素纳入Cobb-Douglas生产函数，于是我们有广义的Cobb-Douglas生产函数

$$Y = Ae^{bt}L^{\alpha}K^{\beta} \qquad (3.2.41)$$

其中$e$为自然对数的底，$t$为时间，其它字母与前意义相同。引入时间因素$t$后，我们将经济管理水平的提高，技术进步的作用等一切投入增长以外的因素全归于时间的系数$b$。因此$e^{bt}$又叫**综合技术进步因子**，$b$为**综合技术进步参数**或简称**技术进步参数**。

由于投入$L$和$K$的增加虽可以使产出$Y$增加，但不能使产出效率$\frac{Y}{L}$或$\frac{Y}{K}$增加，产出效率的提高应归于技术进步

和管理水平的进步。

不考虑技术进步因子 $e^{bt}$ 时，Cobb-Douglas 生产函数可用劳动生产率 $\frac{Y}{L}$ 表为

$$\frac{Y}{L}=A\frac{K^{\beta}}{L^{1-\alpha}}$$

若 $\beta>1-\alpha$，即 $\alpha+\beta>1$，则当投入 $K$，$L$ 都增加 $\lambda$ 倍（$\lambda>1$）时，上式变成

$$\left(\frac{Y}{L}\right)'=A\frac{K^{\beta}}{L^{1-\alpha}}\lambda^{\beta+\alpha-1}>\frac{Y}{L}$$

也就是说 $\alpha+\beta>1$ 时，投入增加会使劳动生产率提高。同理可证，若 $\alpha+\beta>1$，则当投入增加时，资本产出率 $\frac{Y}{K}$ 亦会增加。前文中我们假定劳动生产率或资本产出率提高都是广义技术进步的作用。所以 $\alpha+\beta>1$ 与这种假定矛盾。为了将广义技术进步对劳动生产率和资本生产率提高的影响全纳入技术进步因子 $e^{bt}$，我们令

$$\alpha+\beta=1$$

为了保证做模型过程中 $\alpha+\beta$ 恒等于1，则我们可将式(3.2.41) 稍加变形：

$$Y=Ae^{bt}L^{1-\beta}K^{\beta}$$

$$\frac{Y}{L}=Ae^{bt}\left(\frac{K}{L}\right)^{\beta},$$

$$y=Ae^{bt}k^{\beta} \qquad (3.2.41')$$

其中 $y=\frac{Y}{L}$ 为劳动生产率，$k=\frac{K}{L}$ 为人均装备率。用此式做出的模型恢复 $Y$，$L$，$K$ 变量后 $\alpha+\beta$ 恒等于1，这样就把技术进步因素完全分离出来了。

将式 (3.2.41) 求对数，然后求全微分，我们有

$$\ln Y=\ln A+bt+\alpha\ln L+\beta\ln K$$

$$\frac{dY}{Y}=bdt+\alpha\frac{dL}{L}+\beta\frac{dK}{K}$$

将上式离散化，令$dt=\Delta t=1$，则得到

$$\frac{\Delta Y}{Y}=b+\alpha\frac{\Delta L}{L}+\beta\frac{\Delta K}{K} \quad (3.2.42)$$

如果我们已知参数α，β，且知道某年的产出增长率$\frac{\Delta Y}{Y}$，劳动增长率$\frac{\Delta L}{L}$，固定资产增长率$\frac{\Delta K}{K}$，我们可以通过式（3.2.42）计算技术进步因素对产出增长所起作用的比重，令这一比重为$k_1$，则

$$k_1=\frac{b}{\frac{\Delta Y}{Y}} \quad (3.2.43)$$

而劳动增长对产出增长所起作用的比重为

$$k_2=\frac{\alpha\frac{\Delta L}{L}}{\frac{\Delta Y}{Y}} \quad (3.2.44)$$

固定资产增长对产出增长所起作用的比重为

$$k_3=\frac{\beta\frac{\Delta K}{K}}{\frac{\Delta Y}{Y}} \quad (3.2.45)$$

劳力和资本投入对产出增长的贡献，可合并称为**外延型扩大再生产贡献**，而技术进步的贡献比重$k_1$又叫**内涵型扩大再生产贡献**的比重。外延扩大再生产贡献的比重等于$k_2+k_3$。

近年各国政府经济报告中经常出现**综合生产率指数**的字眼。它也是用生产函数算出来的。设投入增长率为 $i=\frac{\Delta X}{X}$，产出增长率为 $r=\frac{\Delta Y}{Y}$，则综合生产率指数为

$$1+R=\frac{1+r}{1+i} \tag{3.2.46}$$

即

$$r=R+i+Ri \tag{3.2.47}$$

由于

$$0<R<1, \quad 0<i<1$$

所以

$$Ri \ll 1$$

所以

$$r \doteq R+i$$

当产出增长1%时，投入增长对产出增长贡献的比重（即外延型扩大再生产贡献的比重）为

$$\frac{i}{r}=k_2+k_3 \doteq \frac{i}{R+i} \tag{3.2.48}$$

生产率提高贡献的比重(即内涵型扩大再生产贡献的比重)为

$$\frac{R}{r}=k_1 \doteq \frac{R}{R+i} \tag{3.2.49}$$

若产出不是增长1%，而是增长 $r$，则投入的总贡献为

$$\alpha\frac{\Delta L}{L}+\beta\frac{\Delta K}{K}=(k_2+k_3)\frac{\Delta Y}{Y} \doteq \frac{i}{R+i}r \tag{3.2.50}$$

而生产率提高即技术进步的贡献为

$$b=k_1\frac{\Delta Y}{Y} \doteq \frac{R}{R+i}r \tag{3.2.51}$$

式（3.2.47）和式（3.2.51）可写为

$$\begin{aligned} i&=\frac{r-R}{1+R} \\ i&=R\left(\frac{r}{b}-1\right) \end{aligned} \tag{3.2.52}$$

消去 $i$ 得到$R$的二元一次方程

$$(r-b)R^2+rR-rb=0 \tag{3.2.53}$$

解出

$$R=\frac{-r+\sqrt{r^2+4rb(r-b)}}{2(r-b)} \tag{3.2.54}$$

**例** 我国1952～1979年全民所有制工业企业的生产函数为

$$Y=240.3990\,L^{0.5633}K^{0.4367}e^{0.0153t}$$

某年这些企业职工人数增长 2 %，固定资产增长5.4%，总产值增长 5 %，即$\frac{\Delta L}{L}=0.02$，$\frac{\Delta K}{K}=0.054$，$\frac{\Delta Y}{Y}=0.05$，$b=0.0153$，$\alpha=0.5633$，$\beta=0.4367$。将这些数据代入公式（3.2.43）、（3.2.44）、（3.2.45）可算出这年内涵扩大再生产贡献的比重为

$$k_1=\frac{b}{\frac{\Delta Y}{Y}}=\frac{0.0153}{0.05}=30.6\%$$

劳动贡献的比重为

$$k_2=\frac{\alpha\frac{\Delta L}{L}}{\frac{\Delta Y}{Y}}=\frac{0.5633\times0.02}{0.05}=22.53\%$$

固定资产贡献的比重为

$$k_3=\frac{\beta\frac{\Delta K}{K}}{\frac{\Delta Y}{Y}}=\frac{0.4367\times0.054}{0.05}=47.16\%$$

外延型扩大再生产贡献的比重为

$$k_2+k_3=22.53\%+47.16\%=69.69\%$$

将 $r=\frac{\Delta Y}{Y}=0.05$，$b=0.0153$ 代入式（3.2.54），可算出综合生产率增长率

$$R=\frac{-r+\sqrt{r^2+4rb(r-b)}}{2(r-b)}$$

$$=\frac{-0.05+\sqrt{0.05^2+4\times0.05\times0.0153(0.05-0.0153)}}{2\times(0.05-0.5633)}$$

$$=0.01514$$

则综合生产率指数为

$$1+R=101.514\%$$

将 $R=0.01514$ 和 $r=\frac{\Delta Y}{Y}=0.05$ 代入式（3.2.52），则可解出总投入增长率

$$i=0.0343$$

而总投入指数

$$1+i=103.43\%$$

Cobb-Douglas 生产函数的替代弹性是一个不变的自然数 1，因此它的参数 $A$，$\alpha$，$\beta$ 虽有一定的适应性，但却不适于替代弹性不等于 1 的生产情况，也就是说在替代弹性上没有广泛的适用性。自然我们想到如果能设计出一种模型，其替代弹性不是不变常数，而是参数常数，即它可以任意取值，那么生产函数的适用性就更广泛了。这种生产函数就是 **CES**（不变替代弹性）**生产函数**，它的替代弹性不是一个具体的常数（例如 1），而是一个可以取不同值的参数常数。这种参数常数一旦确定，生产函数的替代弹性就不变了，但是

对于不同的部门的生产函数，替代弹性可以取不同的常数值。由于 CES 生产函数有广泛的适用性，所以近年来深受人们的注意，逐渐比 Cobb-Douglas 生产函数更为重要。

CES 生产函数的一般形式是

$$Y = r\left[\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho}\right]^{-\frac{u}{\rho}} \qquad (3.2.55)$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1$$

将上式分别对 $L$，$K$ 求偏导数，则得到劳动和资本的边际产出率

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (-\rho\delta_1 L^{-\rho-1})\left(-\frac{u}{\rho}\right) r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1}$$

$$= \delta_1 u L^{-\rho-1}\, r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1} \qquad (3.2.56)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = (-\rho\delta_2 K^{-\rho-1})\left(-\frac{u}{\rho}\right) r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1}$$

$$= \delta_2 u K^{-\rho-1}\, r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1} \qquad (3.2.57)$$

要使 $\frac{\partial Y}{\partial L} > 0$，$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0$，则要求参数 $\delta_1 > 0$，$\delta_2 > 0$，$u > 0$，$r > 0$。又 $\because \delta_1 + \delta_2 = 1$，$\therefore \delta_1 > 0$ 要求 $\delta_2 < 1$，$\delta_2 > 0$ 要求 $\delta_1 < 1$。$\therefore 0 < \delta_1 < 1$，$0 < \delta_2 < 1$ 成立。

产出对劳动的弹性为

$$\frac{\partial Y}{\partial L}\cdot\frac{L}{Y} = \frac{\delta_1 u L^{-\rho-1}\, r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1}\cdot L}{r\,(\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}}}$$

$$= \frac{\delta_1 u L^{-\rho}}{\delta_1 L^{-\rho} + \delta_2 K^{-\rho}} = \frac{u}{1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\rho}} \qquad (3.2.58)$$

所以 $\delta_1$ 越大产出对劳力的弹性越大。

而产出对资本的弹性为

$$\frac{\partial Y}{\partial K}\ \frac{K}{Y}=\frac{\delta_2 uK^{-\rho-1}r\left(\delta_1 L^{-\rho}+\delta_2 K^{-\rho}\right)^{-\frac{u}{\rho}-1}K}{r\left(\delta_1 L^{-\rho}+\delta_2 K^{-\rho}\right)^{-\frac{u}{\rho}}}$$

$$=\frac{\delta_2 uK^{-\rho}}{\delta_1 L^{-\rho}+\delta_2 K^{-\rho}}$$

$$=\frac{u}{\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}} \qquad (3.2.59)$$

所以 $\delta_2$ 越大，产出对资本的弹性越大，因此 $\delta_1$ 又叫**劳力密集系数**，$\delta_2$ 又叫**资本密集系数**。$\delta_1$，$\delta_2$反映了两种投入的权重，统称为**分布参数**。根据式（3.2.25）关于生产弹性的定义，生产弹性 $\varepsilon$ 为产出对所有投入弹性之和，所以 CES 生产函数之生产弹性为

$$\varepsilon=\frac{\partial Y}{\partial L}\ \frac{L}{Y}+\frac{\partial Y}{\partial K}\ \frac{K}{Y}$$

$$=\frac{u\delta_1 L^{-\rho}}{\delta_1 L^{-\rho}+\delta_2 K^{-\rho}}+\frac{u\delta_2 K^{-\rho}}{\delta_1 L^{-\rho}+\delta_2 K^{-\rho}}$$

$$=u \qquad (3.2.60)$$

也就是说投入都增加 $\lambda$ 倍，则产出会增加 $u\lambda$ 倍。因此 CES 生产函数是 $u$ 阶齐次函数。若 $u=1$，则为一阶齐次函数，相当于 Cobb-Douglas 生产函数的 $\alpha+\beta=1$。这时生产是规模报酬不变的，若 $u<1$，则为规模报酬递减的，若 $u>1$，则为规模报酬递增的，所以 $u$ 又叫**阶次参数**。

CES生产函数的边际替代率为

$$s=-\frac{dK}{dL}=\frac{\partial Y}{\partial L}\bigg/\frac{\partial Y}{\partial K}$$

$$=\frac{\delta_1 uL^{-\rho-1}r\,(\delta_1L^{-\rho}+\delta_2K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1}}{\delta_2 uK^{-\rho-1}r\,(\delta_1L^{-\rho}+\delta_2K^{-\rho})^{-\frac{u}{\rho}-1}}$$

$$=\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1} \tag{3.2.61}$$

将 $s$ 对 $\frac{K}{L}$ 求导数，则

$$\frac{ds}{d\left(\frac{K}{L}\right)}=(\rho+1)\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho} \tag{3.2.62}$$

一般而言，人均资本 $\frac{K}{L}$ 上升，边际替代率 $\frac{dK}{dL}$ 是不减的，所以上式必须不小于 0，即要求

$$\rho+1\geqslant 0,\quad \rho\geqslant -1 \tag{3.2.63}$$

根据生产要素替代弹性的定义式（3.2.39）我们可计算CES生产函数的替代弹性

$$\sigma=\frac{d\left(\ln\frac{K}{L}\right)}{d(\ln s)}$$

将式（3.2.61）中的 $s=\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}$ 代入上式，则

$$\sigma=\frac{d\left(\ln\frac{K}{L}\right)}{d\left[\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}\right]}=\frac{1}{\dfrac{d\left\{\ln\frac{\delta_1}{\delta_2}+(\rho+1)\ln\left(\frac{K}{L}\right)\right\}}{d\left(\ln\frac{K}{L}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\rho+1} \tag{3.2.64}$$

又由于$\rho \geqslant -1$，$\rho+1 \geqslant 0$，所以CES生产函数的替代弹性为非负常数。由于$\rho$的值决定替代弹性的大小，所以$\rho$叫**替代参数**。CES生产函数之替代弹性不再象Cobb-Douglas生产函数的替代弹性为一个具体的算术数1，而是含有参数常数$\rho$，$\rho$可任意取大于$-1$的值，因此有广泛的适用性，令$\rho \to 0$，则CES生产函数就变成了替代弹性等于1的Cobb-Douglas生产函数。令$\rho \to \infty$，则CES生产函数就接近替代弹性等于0的投入产出生产函数。令$\rho \to -1$，则CES生产函数就接近于替代弹性等于无穷大的线性生产函数。总之众多生产函数都可视为CES生产函数的特例。

由于替代弹性决定了要素收入的比重变化规律，所以若$0 > \rho > -1$，则替代弹性$\sigma > 1$，则工资收入的比重越来越大；若$\rho > 0$，则$0 < \sigma < 1$，所以工资收入的比重越来越小，投资利润收入的比重越来越大；若$\rho = 0$，则与Cobb-Douglas生产函数相同，工资收入和利润收入的比重保持不变。

生产函数并不仅限于两种投入，以上分析可以推广到有$n$种投入的情形。前文中关于经济效果要素分解的方法也可推广到$n$种要素的情形。近年Denison〔1972，1974，1976，1979〕，Kendrick〔1980〕等人将此种分析方法用到各种社会经济问题的要素分解方面，早已超出了生产函数的范围，但基本方法与此处所述类同。可见这种要素分解方法有广泛的应用前景。比如，若能规定测度责任制水平的指标，也可以用此法将农业责任制对产出增加的贡献比重计算出来。

另外，Cobb-Douglas，CES生产函数目前的应用早已超过了生产领域，例如上一章的效用函数，我们主要亦介绍了Cobb-Douglas型和CES型效用函数。由于这两种齐次函

数的一些非常奇妙的特性，它们被广泛用在许多领域以描述多变量因素之间的关系。

由于CES生产函数无法线性化，所以做此种模型就碰到非线性回归分析问题。

设CES生产函数为

$$Y = r\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{u}{\rho}} \qquad (3.2.65)$$

取对数

$$\ln\hat{Y} = \ln r - \frac{u}{\rho}\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right]$$

$$(3.2.66)$$

令$K$，$L$为观测值$K_i$，$L_i$，则$\ln\hat{Y}_i$为估计值，它与$\ln Y_i$的观测值之残差平方和为

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln Y_i - \ln r + \frac{u}{\rho}\ln\left[\delta K_i^{-\rho} + (1-\delta)L_i^{-\rho}\right]\right\}^2$$

$$(3.2.67)$$

其中$n$为样本点数。将式（3.2.67）分别对参数$r$，$u$，$\rho$求偏导数且令其等于0，则可得到3个非线性方程，其中含3个未知参数$r$，$u$，$\rho$。用数值解法可以解出这3个未知参数$r$，$u$，$\rho$的估计值。

令式（3.2.66）中的

$$\ln\left[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}\right] = f(\rho) \qquad (3.2.68)$$

将上式在$\rho = 0\left(\text{即}\ \sigma = \frac{1}{1+\rho} = 1\right)$的邻域用泰勒级数展开，得

$$f(\rho) - f(0) = \rho f'(0) + \frac{1}{2}\rho^2 f''(0) + \text{高阶项}$$

$$(3.2.69)$$

将式（3.2.68）对ρ求偏导数，则得到

$$f'(\rho)=\frac{-\{\delta\ln K(K^{-\rho})+(1-\delta)\ln L(L^{-\rho})\}}{\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}} \tag{3.2.70}$$

令ρ＝0，则

$$f'(0)=-[\delta\ln K+(1-\delta)\ln L] \tag{3.2.71}$$

将式（3.2.70）再对ρ求一次偏导数，

$$f''(\rho)=\frac{[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}][\delta(\ln K)^2K^{-\rho}+(1-\delta)(\ln L)^2L^{-\rho}]}{[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^2}-\frac{[\delta\ln KK^{-\rho}+(1-\delta)\ln LL^{-\rho}]^2}{[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^2} \tag{3.2.72}$$

令ρ＝0，则

$$\begin{aligned}f''(0)&=[\delta(\ln K)^2+(1-\delta)(\ln L)^2]-[\delta\ln K+(1-\delta)\cdot\ln L]^2=\delta(\ln K)^2+(1-\delta)(\ln L)^2-\delta^2(\ln K)^2\\&\quad-(1-\delta)^2(\ln L)^2-2\delta(1-\delta)\ln K\ln L\\&=\delta(1-\delta)[(\ln K)^2-2\ln K\ln L+(\ln L)^2]\\&=\delta(1-\delta)(\ln K-\ln L)^2\\&=\delta(1-\delta)\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2\end{aligned} \tag{3.2.73}$$

将式（3.2.71）和（3.2.73）代入式（3.2.69），则

$$\begin{aligned}f(\rho)&=f(0)+\rho f'(0)+\frac{1}{2}\rho^2f''(0)\\&=\ln 1-\rho[\delta\ln K+(1-\delta)\ln L]+\frac{\rho^2}{2}\delta(1-\delta)\cdot\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2=-\rho[\delta\ln K+(1-\delta)\ln L]\\&\quad+\frac{\rho^2}{2}\delta(1-\delta)\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2\end{aligned} \tag{3.2.74}$$

将上式代入式（3.2.68），再代入式（3.2.66），则

$$\ln\hat{Y}=\ln r-\frac{u}{\rho}f(\rho)$$

$$=\ln r-\frac{u}{\rho}\left\{-\rho\left[\delta\ln K+(1-\delta)\ln L\right]+\frac{\rho^2}{2}\delta(1-\delta)\cdot\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2\right\}=\ln r+u\delta\ln K+u(1-\delta)\ln L$$

$$-\frac{u\rho}{2}\delta(1-\delta)\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2 \qquad (3.2.75)$$

令$B_0=\ln r$，$u\delta=B_1$

$$u(r\delta)=B_2,\quad -\frac{u\rho}{2}\delta(1-\delta)=B_3 \qquad (3.2.76)$$

则（3.2.75）可写为

$$\ln\hat{Y}=B_0+B_1\ln K+B_2\ln L+B_3\left(\ln\frac{K}{L}\right)^2 \qquad (3.2.77)$$

这就可以用普通最小二乘法进行三元线性回归，估计出参数$B_0$，$B_1$，$B_2$，$B_3$。

从式（3.2.76）可用已知参数$B_0$，$B_1$，$B_2$，$B_3$表出待求参数$r$，$u$，$\rho$，$\delta$：

$$r=\ln^{-1}B_0$$

$$\delta=\frac{B_1}{B_1+B_2}$$

$$u=B_1+B_2 \qquad (3.2.78)$$

$$\rho=-\frac{2B_3(B_1+B_2)}{B_1B_2}$$

## §3.3 生产者的最优经济效果——费用最小化

生产者的经济效果问题，就是在产出一定的条件下费用最小化，或在生产技术和资源约束下使利润最大化。此节我们研究费用最小化问题。

设某企业使用两种投入 $x_1$，$x_2$，生产一种产品 $y$，两种投入的价格分别为 $p_1$，$p_2$，则成本为

$$C=p_1x_1+p_2x_2 \tag{3.3.1}$$

而约束条件是在一定的技术经济条件下（用生产函数表示）使产出达到 $y_0$，即在下式约束下使式（3.3.1）最小化：

$$y_0=f(x_1,\ x_2) \tag{3.3.2}$$

$f(x_1,\ x_2)$ 为生产函数，它可以是 Cobb-Douglas 型的或 CES型的。

这是典型的条件极值问题。数学中有关求极值和最优化的理论最适于用来分析各种各样的最优经济效果问题。国外很多文献（如 Intriligator〔1971〕）都认为将问题“经济化”就是写成在某个约束条件下求某个目标函数极值的数学问题。很多求极值数学理论和概念只能在最优经济效果问题中找到原型，例如拉格朗日乘数、对偶规划、协状态变量等等。可见经济问题与数学是完全“同构”的，二者几乎分不出彼此。正如诺贝尔经济学奖金的获得者克莱因所说：“经济学就是数学。”条件极值可以用线性规划，非线性规划、动态规划、控制理论来求解。在此我们主要是采用拉格朗日乘数法则求解。

作拉格朗日函数

$$L=p_1x_1+p_2x_2+\lambda[y_0-f(x_1,\ x_2)] \tag{3.3.3}$$

最优化的一阶条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad 或p_1=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad 或p_2=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_2} \tag{3.3.4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=y_0-f(x_1,\ x_2)=0$$

上式有三个方程，若给定$p_1$，$p_2$和$y_0$，则有三个未知数$x_1$，$x_2$，$\lambda$，于是我们可以用$p_1$，$p_2$，$y_0$表出最优解$x_1^*$，$x_2^*$，$\lambda^*$。一般地，我们从式（3.3.4）可解出费用最小化的条件

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}=-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{p_1}{p_2} \tag{3.3.5}$$

$$\frac{p_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}=\frac{p_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}=\lambda \tag{3.3.6}$$

式（3.3.5）说明投入的边际替代率$-\dfrac{dx_2}{dx_1}$等于投入的价格比$\dfrac{p_1}{p_2}$时达到最优经济效果。由于$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$为投入的边际产出率，而$p_1$，$p_2$分别为相应投入的价格，即单位投入的成本。所以$\dfrac{p_1}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}$为第一种投入的边际产出的费用，而$\dfrac{p_2}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}$为第二种投入的边际产出的费用。所以最优经济效果要求不同投入的边际产出成本相等。如果$x_1$的边际产出成本高于$x_2$的边际产出成本，则我们可以减少$x_1$的消耗量，增加$x_2$的消耗量，在保持产量不变的条件下降低总成本。只有当所有投入边际产出的成本都相等时，则再不能改进，因而总成本最

小，各种投入的比例亦达到最佳比例。

如果将$x_1^*$，$x_2^*$代入目标函数，则可以求出最小费用$C^*$，由于$x_1^*$，$x_2^*$是$p_1$，$p_2$，$y_0$的函数，所以$C^*$亦可写为$p_1$，$p_2$，$y_0$的函数，若给定$p_1$，$p_2$，则$C^*$可写为产量$y_0$的函数，这就是在最优化条件下的总费用函数。例如，设有Cobb-Douglas 生产函数

$$y=30x_1^{0.7}x_2^{0.5} \tag{3.3.7}$$

$x_1$，$x_2$的价格分别为$p_1=5$，$p_2=3$，于是总费用为

$$C=5x_1+3x_2 \tag{3.3.8}$$

根据最小费用的必要条件（3.3.5）式，我们有最佳投入量$x_1^*$，$x_2^*$必须满足的条件

$$\frac{\dfrac{\partial y}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial y}{\partial x_2}}=\frac{0.7\times 30x_1^{*0.3}x_2^{*0.5}}{0.5\times 30x_1^{*0.7}x_2^{*0.5}}=\frac{5}{3} \tag{3.3.9}$$

解出两种投入的最优比例为

$$\frac{x_2^*}{x_1^*}=1.1905,\ 或x_2^*=1.1905x_1^* \tag{3.3.10}$$

代入式（3.3.7），则可解出

$$x_1^*=(0.03055\,y)^{1/1.2}=0.0546y^{0.8333} \tag{3.3.11}$$

将上式代回式（3.3.10），解出

$$x_2^*=0.0650y^{0.8333} \tag{3.3.12}$$

将用$y$表示的$x_1^*$，$x_2^*$代入目标函数式（3.3.8），则可解出最小费用函数

$$\begin{aligned}C^*&=5x_1^*+3x_2^*\\&=0.1196y^{0.8333}\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

可见生产函数是规模报酬递增时，总费用函数之弹性小于1。

不难证明若生产函数是规模报酬递减的，则总费用函数之弹性大于1。

每个企业的实际总费用与产出量回归，可以算出总费用函数，利用此企业的生产函数也可以算出最小总费用函数，将二者对照就可以看出调节投入的比例达到最优以降低成本的潜力。例如对于一个具体企业的技术经济条件(生产函数)来说究竟是搞劳力密集型生产好还是搞资本密集型好。各种投入的最优比例如何确定，这就有必要用上述方法具体分析。

费用极小化的二阶条件由第二章的式（2.2.49）确定，即要求滚边Hessin矩阵

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & -f_1 \\ L_{21} & L_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

正定。其中 $L_{ij}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$，$f_1=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$，$f_2=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$。

上式正定意味着（见第二章§2.2）

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & -f_1 \\ L_{21} & L_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

这可以改写为

$$\begin{vmatrix} -f_{11} & -f_{12} & -f_1 \\ -f_{21} & -f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0 \tag{3.3.15}$$

将上式展开，得

$$f_{11}f_2^2-2f_1f_2f_{12}+f_{22}f_1^2<0 \tag{3.3.16}$$

这意味着生产函数必须是严格准凹函数，产品集合是凸性集

合，等产量曲线向原点凸出。这与效用最大化的二阶条件类似。

由于投入的边际替代率

$$s=-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

所以

$$\frac{ds}{dx_1}=\frac{f_2\left(f_{11}+f_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right)-f_1\left(f_{21}+f_{22}\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{f_2^2}$$

$$=\frac{f_2\left(f_{11}-f_{12}\frac{f_1}{f_2}\right)-f_1\left(f_{21}-f_{22}\frac{f_1}{f_2}\right)}{f_2^2}$$

$$=\frac{f_2^2f_{11}-2f_1f_2f_{12}+f_1^2f_{22}}{f_2^3} \qquad (3.3.17)$$

上述推导中利用了 Hessin 矩阵的对称性，即 $f_{12}=f_{21}$ 并用了复合函数求导法则，商的求导法则。因为 $f_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 和 $f_2=\frac{\partial f}{\partial x_2}$ 都是 $x_1$，$x_2$ 的函数，所以将其对 $x_1$ 求导数时，要将其对 $x_2$ 求偏导数，乘上 $\frac{dx_2}{dx_1}$。由于 $\frac{\partial f}{\partial x_2}>0$，所以 $f_2^3>0$，根据式（3.3.16）和式（3.3.17）的分子小于 0，所以

$$\frac{ds}{dx_1}<0 \qquad (3.3.18)$$

这意味着边际替代率 $s=-\frac{dx_2}{dx_1}$ 递减。即当一种投入不断增多时，由于其边际产出率相对于其它投入的边际产出率下降，因而它替代其它投入的能力越来越低。

## §3.4 拉氏乘数之经济学意义——影子价格和影子费用

拉氏乘数的“物理意义”是什么？这是人们关心的一个理论问题。在经济学中拉氏乘数就是影子价格。所谓影子价格就是目标函数极值对约束条件常数项的一阶偏导数，也就是最优化条件下支出的边际效用，或产出的边际费用，或资源的边际收益……。

经济学的中心问题就是在满足需求的条件下使费用极小化，或在预算约束下使产出或效用最大化，与此对偶的是最优价格问题。数字中的条件极值问题，也有对偶问题，这在拉格朗日乘数法则中就是拉格朗日乘数，在线性规划问题中就是对偶规划的最优解，而在最大值原理中就是协状态变量。经济学中的对偶与数学中的对偶形成同构。正如诺贝尔奖金获得者库普曼所说，资源的最优分配与最优价格（效率价格）是一个硬币的两面，其中一个问题解出来了，另一个问题也随之而解出。

下面我们就用数学方法来证明拉氏乘数的意义。

假定我们要极大化含有两个自变量 $x_1$，$x_2$ 的函数 $y$：

$$y = f(x_1,\ x_2) \tag{3.4.1}$$

约束条件为

$$g(x_1,\ x_2) = b \tag{3.4.2}$$

拉氏函数为

$$L = f(x_1,\ x_2) + \lambda[b - g(x_1,\ x_2)] \tag{3.4.3}$$

最优化的一阶条件为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$b-g(x_1, x_2)=0$$

联立上列三式，三个方程中含3个未知数 $\lambda$，$x_1$，$x_2$，$b$ 为已知，所以可以解出 $x_1^*$，$x_2^*$，$\lambda^*$，它们都能用 $b$ 表出，即

$$\begin{aligned} x_1^* &= \varphi^1(b) \\ x_2^* &= \varphi^2(b) \\ \lambda^* &= \varphi^3(b) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

将上列三个最优解代入拉氏函数，则

$$L^*=f(x_1^*, x_2^*)+\lambda^*[b-g(x_1^*, x_2^*)] \tag{3.4.6}$$

它也是 $b$ 的函数，将 $L^*$ 对 $b$ 求偏导数，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x_1^*}\frac{\partial \varphi^1}{\partial b}+\frac{\partial f}{\partial x_2^*}\frac{\partial \varphi^2}{\partial b}+\frac{\partial \varphi^3}{\partial b}[b-g(x_1^*, x_2^*)] \\ &\quad +\varphi^3\left[1-\left(\frac{\partial g}{\partial x_1^*}\frac{\partial \varphi^1}{\partial b}+\frac{\partial g}{\partial x_2^*}\frac{\partial \varphi^2}{\partial b}\right)\right] \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^*}-\varphi^3\frac{\partial g}{\partial x_1^*}\right)\frac{\partial \varphi^1}{\partial b}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2^*}-\varphi^3\frac{\partial g}{\partial x_2^*}\right)\frac{\partial \varphi^2}{\partial b} \\ &\quad +\frac{\partial \varphi^3}{\partial b}[b-g(x_1^*, x_2^*)]+\varphi^3 \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

从式（3.4.4）可解出

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda^*\frac{\partial g}{\partial x_1}=\varphi^3\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \lambda^*\frac{\partial g}{\partial x_2}=\varphi^3\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ b-g(x_1^*, &\ x_2^*)=0 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

将式（3.4.8）代入式（3.4.7），则得

$$\frac{\partial L^*}{\partial b}=\varphi^3=\lambda^* \tag{3.4.9}$$

由于当 $x$，$\lambda$ 取最优值 $x^*$，$\lambda^*$ 时，

$$L^*(b)=f^*(b)$$

所以

$$\frac{\partial L^*}{\partial b}=\frac{\partial f^*}{\partial b}=\lambda^* \tag{3.4.10}$$

即拉氏乘数 $\lambda^*$为目标函数值 $f^*$对约束条件常数项 $b$ 之一阶偏导数。若目标为使效用函数极大化，$b$ 为预算约束，则$\lambda^*$表示增加一元钱收入可以使最大效用增加多少，即支出之边际效用；若目标为收益最大化，$b$ 为资源约束，则 $\lambda^*$ 表示资源的边际价值；若目标为费用函数极小化，$b$ 为产出水平，则 $\lambda^*$为产出的影子费用……，影子价格 $\lambda^*$ 随目标函数、约束条件的经济意义和测度单位不同而有种种不同的具体内容，但总的来说，$\lambda^*$是目标函数极值对约束条件常数项之一阶偏导数，即广义的边际价值。

## §3.5 生产者追求最优经济效果的行为规律转化为生产者对投入的需求函数和对产出的供给函数

本节我们以生产函数为约束条件，将利润最大化作为目标函数。设企业用两种投入 $x_1$，$x_2$ 生产一种产出 $y$，产出的价格为 $r$，投入的价格分别为 $p_1$，$p_2$，技术经济条件由生产函数

$$y=f(x_1, x_2) \tag{3.5.1}$$

描述。利润函数为

$$\begin{aligned}\pi &= ry-p_1x_1-p_2x_2\\ &= rf(x_1, x_2)-p_1x_1-p_2x_2\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

当价格为给定的常数时，利润最大化的一阶条件为

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1}=r\frac{\partial f}{\partial x_1}-p_1=0，\ 即\ r\frac{\partial f}{\partial x_1}=p_1 \tag{3.5.3}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = r\frac{\partial f}{\partial x_2} - p_2 = 0，\text{即}\ r\frac{\partial f}{\partial x_2} = p_2 \qquad (3.5.4)$$

$r\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$r\frac{\partial f}{\partial x_2}$叫做**投入的边际产值**，上两式说明最优经济效果的条件是投入的边际产值（即边际收益）等于投入之价格。从式（3.5.3）和式（3.5.4）可导出

$$\frac{p_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{p_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = r \qquad (3.5.5)$$

其中 $p_1$ 为投入 $x_1$ 之单位价格，$\frac{\partial f}{\partial x_1}$为单位投入之边际产出量。单位投入价格，即单位投入之费用除以单位投入之边际产出量，则为边际产出费用。上式说明最优化的条件为不同投入的边际产出费用必须相等，且等于产出的价格，若边际费用低于产出价格，则说明增加此种投入仍有利可图，所以必须进一步增加此种投入才能达到最优；若边际费用高于产出价格，则有亏损，所以必须减少此种投入。而当边际费用等于产出价格，即边际利润（利润的一阶导数）等于0时利润取其最大值。这就是说产出之边际费用等于产出价格，而（3.5.3）式和（3.5.4）式是说投入的边际收益等于投入的价格，它也说明投入的边际费用必须等于投入的边际收益，才能使利润最大化。

从式（3.5.3）和式（3.5.4）还可导出

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}，\ \text{或}\ \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{p_2} \qquad (3.5.6)$$

此式说明最优经济效果的条件为两种投入的边际替代率等于

两种投入的价格反比，且用来购买投入的每元支出之边际产出率都必须相等。如果买 $x_1$ 的每元支出的边际产出率较高，则我们增加 $x_1$ 的购买，减少 $x_2$ 的购买可以使总产出进一步增加，而当购买不同投入的每元钱边际产出率都相等时，则不可能再改进。

式（3.5.1），式（3.5.3）和式（3.5.4）中有 $r$，$p_1$，$p_2$ 三个参数，$x_1$，$x_2$，λ 三个未知量，共有三个方程，则我们可以用 $r$，$p_1$，$p_2$ 表出 $x_1^*$，$x_2^*$，$\lambda^*$，即

$$x_1^*=g^1(r,\ p_1,\ p_2) \tag{3.5.7}$$

$$x_2^*=g^2(r,\ p_1,\ p_2) \tag{3.5.8}$$

$$\lambda^*=g^3(r,\ p_1,\ p_3) \tag{3.5.9}$$

式（3.5.7），式（3.5.8）就是企业对投入 $x_1$，$x_2$ 的需求函数，将此两式代入生产函数式（3.5.1），则可解出最优产出量

$$y^*=f(x_1^*,\ x_2^*)=\varphi(r,\ p_1,\ p_2) \tag{3.5.10}$$

这就是产出的供给函数。

利润最大化的二阶条件为 Hessin 矩阵

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}$$

负定，即

$$\pi_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{vmatrix}>0 \tag{3.5.11}$$

根据式（3.5.2），这等价于要求

$$f_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}>0 \tag{3.5.12}$$

展开式（3.5.12），则

$$f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0 \qquad (3.5.12')$$

这意味着生产函数满足严格凹性，产品集合为凸集合，等产量线向原点凸出。由于严格凹性函数必定满足严格准凹性（严格准凹函数不一定满足严格凹性），所以式（3.5.12）意味着

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.5.13)$$

负定，即

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.5.14)$$

展开后得

$$f_{11}f_2^2-2f_1f_2f_{12}+f_{22}f_1^2<0 \qquad (3.5.15)$$

由于边际替代率

$$s=-\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_1}{f_2}$$

所以

$$\frac{ds}{dx_1}=\frac{f_2\left(f_{11}+f_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right)-f_1\left(f_{21}+f_{22}\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{f_2^2}$$

$$=\frac{f_2\left(f_{11}-f_{12}\frac{f_1}{f_2}\right)-f_1\left(f_{21}-f_{22}\frac{f_1}{f_2}\right)}{f_2^2}$$

$$=\frac{f_{11}f_2^2-2f_1f_2f_{12}+f_{22}f_1^2}{f_2^3} \qquad (3.5.16)$$

由于 $f_2>0$，且式（3.5.15）使式（3.5,16）的分子小于

0，所以

$$\frac{ds}{dx_1}<0 \tag{3.5.17}$$

即利润最大化的二阶条件意味着生产函数投入的边际替代率递减。

从式（3.5.3），式（3.5.4）还可导出

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\frac{p_1}{r}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=\frac{p_2}{r}\end{aligned} \tag{3.5.18}$$

即最优经济效果的条件是投入的边际产出等于其价格与产出价格之比。由于对投入的需求函数和对产出的供给函数都从此式导出，所以当 $p_1$，$p_2$，$r$ 等比例变化时，对投入的最优需求量和对产出的最优供给量不变，即投入的需求函数和产出的供给函数是所有投入价格和产出价格的0阶齐次函数。

从最优投入需求量函数式（3.5.7），式（3.5.8）即最优产出供给量函数式（3.5.10）我们可以看出，企业消耗各种生产资料的数量及最优比例是由投入价格和产出价格控制的，而使其本位利益最大化的最优产出量也是由产出价格和投入价格控制的。如果我们想调节企业的生产资料消耗量及其比例（例如我们企图使企业节省石油，减少石油的使用比率，或使企业搞资本密集型生产），则我们不必直接给企业下达指令性计划，或者制定一些配给定额，而只要适当调节投入价格和产出价格则完全可以达到目的。例如石油提价，可以使企业减少烧油的比重，工资提高会迫使企业搞自动化程度较高的资本密集型生产等等。如果要企业搞劳力密集型生

产，则可以提高贷款利率（即资本价格）迫使企业减少昂贵的资本使用量，等等。

## §3.6 资源有限的情况下的最优经济效果

如果我们有一种资源 $x$，可以用来生产两种产品 $y_1$, $y_2$，设用来生产 $y_1$ 的资源量为 $x_1$，用来生产 $y_2$ 的资源量为 $x_2$，而生产两种产品的生产函数分别为

$$y_1=f^1(x_1) \tag{3.6.1}$$

$$y_2=f^2(x_2) \tag{3.6.2}$$

资源约束为

$$x_1+x_2=x_0 \tag{3.6.3}$$

从式（3.6.1）我们可以用 $y_1$ 表示 $x_1$，从式（3.6.2）我们可以用 $y_2$ 表示 $x_2$，然后代入式（3.6.3），则可以将（3.6.3）式等号左边写成只含 $y_1$，$y_2$ 的函数，即

$$g(y_1,\ y_2)=x_0 \tag{3.6.4}$$

这就是所谓**转换函数**。它是多个生产函数和资源约束相结合的结果，所以它可视为一种总的生产约束，总的生产函数。它反映了生产的技术经济约束和资源约束，即在现有资源和技术条件下，多生产一种产品，就必须相应减少其它产品的生产。

设 $y_1$ 为大米，$y_2$ 为猪肉，$x$ 为劳动，当劳动量 $x$ 和大米产量 $y_1$ 固定时，猪肉的最大产量 $y_2$ 也就唯一地确定了。我们可以用三维（$x$，$y_1$，$y_2$）空间中的点表示 $x$，$y_1$，$y_2$ 之间的关系。设 $x$ 为纵坐标，$y_1$，$y_2$ 轴组成一个平面，如图3.2所示。我们根据对生产情况的调查，可以在这个三维空间找出很多点，例如若有 360 天劳动日，生产 150 斤猪肉，则还可生产 460 斤大米。若这 360 天劳动要生产 200 斤猪肉，

则还可生产 210 斤大米，如此等等。这些点构成三维空间中的一个曲面，如图 3.2。这个曲面是向下凸的。将资源量 $x$ 固定，相当于用平行于 $y_1-y_2$ 平面的平面截这一空间曲面，得到图中的等高线，它在 $y_1-y_2$ 平面的投影就是资源投入量的无差异曲线，为了将其与效用函数的无差异曲线和生产函数的等产量线相区别，一般称之为**转换曲线**或**生产可能界限曲线**。$y_1-y_2$ 平面中的转换曲线是向原点凹进的，而等产量曲线是向原点凸出的。这两种曲线的区别是：转换曲线是假定资源投入量为常数，一定的资源可以多生产 $y_1$，少生产 $y_2$，也可以多生产 $y_2$，少生产 $y_1$，所以它表示用等量资源生产不同产品之不同数量组合。而等产量曲线是假定产出取一常数，可以多投入一种资源 $x_1$ 少投入另一种资源 $x_2$；也可以多投入 $x_2$，少投入 $x_1$ 而达到同样的产出量。因此它是用投入的不同数量组合达到产出的等量。

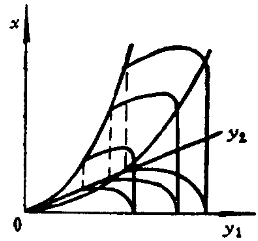


图 3.2

生产者的经济效果问题就是在生产函数和资源限制的总约束式（3.6.4）之下将利润函数最大化。若 $y_1$ 的价格为 $r_1$，$y_2$ 的价格为 $r_2$，$x_0$ 的价格为 $p$，则利润函数为

$$\pi=r_1y_1+r_2y_2-pg(y_1,\ y_2) \qquad (3.6.5)$$

利润最大化的一阶条件为

$$r_1-p\frac{\partial g}{\partial y_1}=0\text{，即}r_1=p\frac{\partial g}{\partial y_1} \qquad (3.6.6)$$

$$r_2-p\frac{\partial g}{\partial y_2}=0\text{，即}r_2=p\frac{\partial g}{\partial y_2} \qquad (3.6.7)$$

其中 $\frac{\partial g}{\partial y_1}$，$\frac{\partial g}{\partial y_2}$ 表示生产 $y_1$，$y_2$ 分别消耗的边际资源量，

所以上两式表示产出的价格等于其边际成本。从上两式还可导出

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial g}{\partial y_2}}=-\frac{dy_2}{dy_1} \tag{3.6.8}$$

其中$-\dfrac{dy_2}{dy_1}$叫做**边际转换率**，它表示在投入为一常数 $x_0$ 时，增加微小 $y_1$ 产量必须减少多少 $y_2$ 产量。

若收益为$R$，则它可以写为

$$R=r_1y_1+r_2y_2 \tag{3.6.9}$$

当$R$为常数，$r_1$，$r_2$给定时，上式可以在 $y_1-y_2$平面用直线表示，这种直线叫做等收益线，当$R$为不同常数时，等收益线可在平面平行移动。若投入量 $x_0$ 固定，则转换曲线固定。式（3.6.8）的几何意义是，当等收益线与转换曲线相切于$A$点时，产出 $y_1$，$y_2$的数量及其比例为最优，这时能在现有技术和资源约束下使收益和利润最大化。等收益线的斜率就是产出的价格比$\dfrac{r_1}{r_2}$。而边际转换率就是转换曲线之切线斜率。边际转换率等于产出价格比就是转换切线斜率等于等收益线斜率。

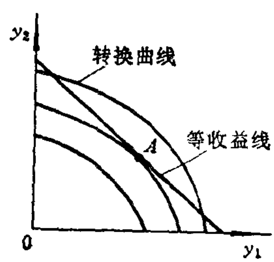


图 3.3

利润最大化的二阶条件为

$$\begin{pmatrix}\pi_{11} & \pi_{12}\\ \pi_{21} & \pi_{22}\end{pmatrix}$$

负定，即要求

$$\begin{pmatrix} -rg_{11} & -rg_{12} \\ -rg_{21} & -rg_{22} \end{pmatrix}$$

负定。也就是

$$-rg_{11}<0, \quad \begin{vmatrix} -rg_{11} & -rg_{12} \\ -rg_{21} & -rg_{22} \end{vmatrix} >0, \qquad (3.6.10)$$

由于 $r>0$，所以上式即

$$g_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} >0 \qquad (3.6.11)$$

也就是转换函数之 Hessin 矩阵正定，这意味着转换函数为严格凸函数，且隐涵转换函数为严格准凸函数，即滚边 Hessin 矩阵

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

正定，即

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{vmatrix} <0 \qquad (3.6.12)$$

此式展开后为

$$g_1^2 g_{22}+g_2^2 g_{11}-2g_1 g_2 g_{12}>0 \qquad (3.6.12')$$

其中利用了 Hessin 矩阵的对称性，$g_{12}=g_{21}$。

令边际转换率为 $t=-\frac{dy_2}{dy_1}=\frac{\partial g}{\partial y_1}\Big/\frac{\partial g}{\partial y_2}$，则

$$\frac{dt}{dy_1}=\frac{g_2\left(g_{11}+g_{12}\frac{dy_2}{dy_1}\right)-g_1\left(g_{21}+g_{22}\frac{dy_2}{dy_1}\right)}{g_2^2}$$

$$=\frac{g_2\left(g_{11}-g_{12}\frac{g_1}{g_2}\right)-g_1\left(g_{21}-g_{22}\frac{g_1}{g_2}\right)}{g_2^2}$$

$$=\frac{g_1^2g_{22}+g_2^2g_{11}-2g_1g_2g_{12}}{g_2^3} \qquad (3.6.13)$$

根据式（3.6.12），则

$$\frac{dt}{dy_1}>0 \qquad (3.6.14)$$

也就是说最优经济效果的二阶条件意味着边际转换率递增，转换曲线向原点凹进。

边际转换率递增的经济意义是，当某种产品生产得很少时，提高产量的潜力大，所以只要给它多投入一点资源，可以使其产量增加很多，而其它产品因此减少的产量并不多；但是当这种产品产量很高时，则继续增加用于生产它的资源却不能增加很多产量，反而使其它产品要减少较多的产量才能使资源投入量不变。

## §3.7 多个生产者的最优经济效果

假设有两个生产者，一个是重工业产品 $y_1$ 的生产者，另一个是轻工业产品 $y_2$ 的生产者，他们都使用两种资源：能源和劳动。能源总量为 $x_1$，其中用于重工业生产的量为 $x_{11}$，用于轻工业生产的量为 $x_{12}$；劳动总量为 $x_2$，其中用于重工业生产的量为 $x_{21}$，用于轻工业生产的量为 $x_{22}$。重工业和轻工业的生产函数分别为

$$y_1=f^1(x_{11}, x_{21}) \qquad (3.7.1)$$

$$y_2 = f^2(x_{12},\ x_{22}) \tag{3.7.2}$$

这是技术条件约束，还有资源约束：

$$x_1 = x_{11} + x_{12} \tag{3.7.3}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} \tag{3.7.4}$$

轻重工业生产者的总目标函数是使总利润最大化，即

$$\max: \quad \pi = r_1 y_1 + r_2 y_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2 \tag{3.7.5}$$

其中 $r_1$，$r_2$ 分别为重工业产品和轻工业产品的价格，$p_1$，$p_2$ 分别为能源价格和工资率。作拉氏函数

$$L = r_1 f^1(x_{11},\ x_{21}) + r_2 f^2(x_{12},\ x_{22}) - p_1 x_1 - p_2 x_2 + \lambda_1(x_1 - x_{11} - x_{12}) + \lambda_2(x_2 - x_{21} - x_{22}) \tag{3.7.6}$$

最优化的一阶条件为

$$r_1 f_1^1 - \lambda_1 = 0, \quad 即\ r_1 f_1^1 = \lambda_1 \tag{3.7.7}$$

$$r_1 f_2^1 - \lambda_2 = 0, \quad 即\ r_1 f_2^1 = \lambda_2 \tag{3.7.8}$$

$$r_2 f_1^2 - \lambda_1 = 0, \quad 即\ r_2 f_1^2 = \lambda_1 \tag{3.7.9}$$

$$r_2 f_2^2 - \lambda_2 = 0, \quad 即\ r_2 f_2^2 = \lambda_2 \tag{3.7.10}$$

$$x_1 = x_{11} + x_{12} \tag{3.7.11}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} \tag{3.7.12}$$

其中 $f_1^1 = \dfrac{\partial f^1}{\partial x_{11}}$，$f_2^1 = \dfrac{\partial f^1}{\partial x_{21}}$，$f_1^2 = \dfrac{\partial f^2}{\partial x_{12}}$，$f_2^2 = \dfrac{\partial f^2}{\partial x_{22}}$。

从式（3.7.7）和式（3.7.9）可解出

$$r_1 f_1^1 = r_2 f_1^2 = \lambda_1 \tag{3.7.13}$$

从式（3.7.8）和式（3.7.10）可解出

$$r_1 f_2^1 = r_2 f_2^2 = \lambda_2 \tag{3.7.14}$$

式（3.7.13），式（3.7.14）说明最优经济效果的条件为某种投入用于不同部门的边际产值，即边际收益必须相等且等于此种投入对全社会的影子价格。这是整体最优化的条件。

回顾式（3.5.3）和式（3.5.4），我们从个别生产者最优经济效果的条件已知，个别生产者，只有将投入比例和产出量调节到投入的边际收益等于投入价格时，才能使利润最大化，而这里讨论的整体最优经济效果的条件是投入在不同部门的边际收益相等且等于投入的影子价格，所以只要将投入的全社会影子价格作为其价格，则个别企业的最大利润条件与全社会的最优经济效果条件完全一致，这时企业从本位利益出发制定的最优计划与整体最优计划一致。这就是著名的**分解协调原理**。单纯形法的发明人旦切克将分解协调原理应用于美国一个糖果饼干公司，取得了极大成功。资本主义国家的大企业大公司也是搞计划经济，但是如果公司太大，下设分公司、分厂太多，则集中的计划往往不符合下面的实际情况，而且下面没有积极性主动性。但如果完全分散控制，则又难以达到整体协调。如果公司用影子价格定价，则下面分厂自己制定的使其利润最大的最优计划与全公司的最优计划就完全一致。这种分权的分层控制综合了集中计划和自由市场的长处而避免了二者的缺陷，既达到了高效率的整体协调，又调动了下面的自动的积极性。苏联的数理经济学家们非常重视分解协调原理，集中力量研究和发展它，最优计划学派立志在全社会范围内应用它来制定最优经济计划。

式（3.7.13）和式（3.7.14）还可改写为

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{f_1^1} = \frac{\lambda_2}{f_2^1} \tag{3.7.15}$$

$$r_2 = \frac{\lambda_1}{f_1^2} = \frac{\lambda_2}{f_2^2} \tag{3.7.16}$$

$\frac{\lambda_1}{f_1^1}$为能源用于重工业的产出之影子费用，$\frac{\lambda_2}{f_2^1}$为劳动用于

重工业产出的影子费用，而$\frac{\lambda_1}{f_1^2}$，$\frac{\lambda_2}{f_2^2}$分别为能源和劳动用于轻工业产出的影子费用。上两式说明各种投入用于一个部门所生产的边际产品之费用（影子费用）必须等于产出价格。回顾式（3.5.5）若投入价格按影子价格$\lambda_1, \lambda_2$确定，则个别生产者最大利润的条件与整体最优经济效果条件完全一致。

联立式（3.7.7）和式（3.7.8），然后联立式（3.7.9）和式（3.7.10）可得

$$\frac{f_1^1}{f_2^1}=\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^1=\frac{f_1^2}{f_2^2}=\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (3.7.17)$$

此式意味着各种投入在不同部门的边际替代率必须相等且等于投入的影子价格比才能达到整体最优经济效果。其中$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^1$表示能源和劳动在重工业中的边际替代率，而$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2$表示能源和劳动在轻工业中的边际替代率。

回顾个别生产者利润最大化的条件式（3.5.6）易知，若令投入的价格$P_1$，$P_2$等于投入对全社会的影子价格$\lambda_1$，$\lambda_2$，则本位利润最大与整体最优经济效果一致。

式（3.7.17）还可改写为

$$\frac{f_1^1}{\lambda_1}=\frac{f_2^1}{\lambda_2},\quad \frac{f_1^2}{\lambda_1}=\frac{f_2^2}{\lambda_2} \qquad (3.7.18)$$

其中$\frac{f_1^1}{\lambda_1}$表示重工业部门用来买能源的一元支出之边际产出率，$\frac{f_2^1}{\lambda_2}$表示重工业部门用来买劳动的一元支出之边际产出率，$\frac{f_1^2}{\lambda_1}$，$\frac{f_2^2}{\lambda_2}$分别为轻工业部门花在能源和劳动上的一元

支出的边际生产率，上式说明，某个部门用来购买各种投入的每元支出之边际产出率都必须相等才能达到最优经济效果。

联立式（3.7.7）和式（3.7.9），然后联立式(3.7.8)和式（3.7.10）可得

$$\frac{f_1^1}{f_1^2}=\left(-\frac{dy_2}{dy_1}\right)_1=\frac{f_2^1}{f_2^2}=\left(-\frac{dy_2}{dy_1}\right)_2=\frac{r_2}{r_1} \quad (3.7.19)$$

其中$\left(-\frac{dy_2}{dy_1}\right)_1$为能源用于生产重工业品和轻工业品的边际转换率，即在能源不变的情况下增加一点重工业品必须减少多少轻工业品产量。$\left(-\frac{dy_2}{dy_1}\right)_2$为劳动用于生产重工业品和轻工业品的边际转换率。上式说明不同投入的边际转换率都相等且等于产出的价格比时，可达到最优经济效果。

如果投入也由两个部门生产，则回顾个别生产者的最大利润条件（3.6.8），易知只要按所有投入边际转换率相等且等于产出价格比的原则定价，个别企业的利润最大化条件亦与整体最优经济效果条件相同，由于式（3.7.19）可从式（3.7.15）和式（3.7.16）导出，所以这种订价原则实际上就是产出价格等于其全社会的影子费用即边际成本。

式（3.7.17），式（3.7.19）还说明，不管是对投入的资源还是对产出的产品，所有生产者都要面临相同的比价，即没有价格歧视，没有因价格不同存在套利（投机倒把）的可能性时，经济效果才达到最优。反过来说，也就是若资源或产品在不同用户，不同部门价格不同，存在着投机牟利的可能性时，资源和产品分配肯定不是最优的，这时可以用商业来调剂资源产品，改进要素组合，而在不增加投入的前提下使所有产出增加。为了说明这一点我们用盒型图来加以说明。图 3.4 中 $x_1$ 为能源总量，$x_2$ 为劳动总量，$O_1$ 为重工

业的原点，$O_2$ 为轻工业的原点。盒型图中的任一点表示资源的一种分配方案，例如Q点表示将 $O_1x_{11}$ 量能源分配给重工业，而 $O_2x_{12}$ 量能源分配给轻工业，$O_1x_{11}+O_2x_{12}=x_1$ 然后将 $O_1x_{21}$ 数量劳动分给重工业，$O_2x_{22}$ 量劳动分给轻工业，$O_1x_{21}+O_2x_{22}=x_2$。向 $O_1$ 原点凸出的 $L_1$，$M_1$，$N_1$ 为重工业生产函数的等产量线，向 $O_2$ 原点凸出的 $L_2$，$M_2$，$N_2$ 为轻工业生产函数的等产量线。如果最初资源分配在Q点，则我们将Q点向 $L_1L_2$ 两曲线相交围成的范围内走，例如移至P点，这时投入的资源总量不变，但重工业产量从 $L_1$ 提高到 $M_1$，而轻工业产量从 $L_2$ 提高到 $M_2$。所谓从Q点移至P点，就是通过买卖改变资源分配方案。这就是增加分配给重工业的能源减少分配给重工业的劳动，反过来减少分配给轻工业的能源而增加分配给轻工业的劳动，也就是重工业用劳动与轻工业交换能源。资源按Q点分配时，重工业劳力太多，其边际产出率较低，而能源较少，其边际产出率较高，而轻工业正好相反，所以通过商业交换可以改进资源分配，使轻重工业的产量都增加。我们还可以进一步改进资源分配，将P点向核中移动，直至R点，这时轻工业的等产量线与重工业的等产量线相切，两种资源在不同部门的边际替代率相等。由于两条等产量曲线有公共的切线，而这条切线斜率正好是两种投入的价格比，所以轻重工业面临共同的能源和劳动比价，且不同投入在某个部门的边际产值相等，这时达到最优经济效果。这时如果再增加一个部门的产出必须减少另一个部门的产出，不可能在不减少他人产出或增加他人产出的前提下增加本部门产出。也就是不存在互利的交换的可能性，不可能发生套利和投机倒把活动。在初始分配方案Q，如果Q点不向核内移动，而如图 3.4 中Q点上下两个箭头所指方

向移动，则增加一个部门的产量必须减少其他部门的产量，不是损人利己，就是损己利人，这都是不经济的。$Q$点只有向核内移动才能在互利的前提下使本部门产量最大化。不过正如图 3.4 所示，重工业和轻工业等产量曲线的切点除$R$外还有$C$，$D$等无穷多个。所有这些切点可联成**资源有效分配曲线** $O_1O_2$。也就是说在最优经济效果条件下，我们可以多生产轻工业品，也可以多生产重工业品，光研究生产者的最优经济效果问题无法确定唯一的最终产品的最优比例和产量，这必须由消费者的效用函数，需求函数来决定。也就是说从生产者最优经济效果导出的对投入的需求函数和对产出的供给函数都随投入和产出的价格变化，正象单研究消费者的最优经济效果也无法确定唯一的最终产品需求量一样，消费者对最终产品的需求亦是价格(包括劳动的价格——工资，即收入）的函数。生产者的最优经济效果和消费者的最优经济效果相结合才能产生唯一的综合最优经济效果。

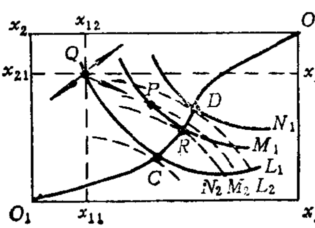



图 3.4

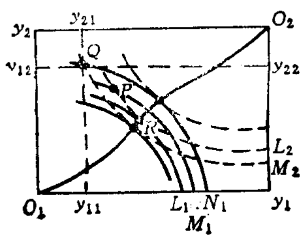



图 3.5

图 3.5 说明了式（3.7.19）的几何意义。图中的 $O_1$ 为能源部门的原点，$O_2$ 为劳动部门的原点。我们假定产出量 $y_1$ 与 $y_2$ 固定。盒形图中任一点说明产品与各种资源的搭配关系。例如在$Q$点，使用了 $N_1$ 量能源和 $M_2$ 量劳动生产 $y_1$ 量

重工业品，$y_2$量轻工业品，如果投入产出组合方案由$Q$移至$P$，则能源从$N_1$降至$M_1$，而劳动从$M_2$降至$L_2$，但总产出不变。只有在能源和劳动的转换曲线相切的点$R$，生产$y_1$量重工业品，$y_2$量轻工业品所用的投入最少。这就是式(3.7.19)的几何意义。当然，我们也会有很多这种切点，它们可联成**有效率转换曲线** $O_1O_2$。两条转换曲线相切时有公共的切线，其斜率就是产出价格比，因此达到最优经济效果时，社会面临共同的产出价格比。如果能源在轻工业的边际收益高于在重工业的边际收益，则我们应该通过商业，在互利的条件下用轻工业的劳动交换重工业的能源，而在资源有限时，使轻重工业产量都提高。只有当能源在所有部门的边际收益等于能源的边际费用即影子价格时，能源分配才达到最优。如果某种能源在各地的价格差超过了运输费用，这亦说明能源的分配不是最优的，我们可以组织商品交换，在互利的情况下使有限的能源生产更多的产品。可见商业虽然不直接生产产品，但是它是做的信息传输和要素最优化组合的工作，在不增加投入的前提下，将要素组合调至最优，可以使所有产品量都增加。现代经济的主要潜力就在于此。所以利用商业调节资源的分配，挖掘最优化的经济潜力是提高经济效果的主要手段之一。从这种意义上说商业不但创造效用，而且能创造物质财富。随着社会化分工协作的发达，要素越来越多，不但有物的要素组合问题，而且有人的因素组合问题，即经济组织结构的优化问题，所以要素组合的优化越来越困难，经济效率的提高越来越依赖于商业、金融来传输信息和进行要素的最优组合。商业和金融提高经济效率的潜力亦越来越大。金融业是进行资金的最优分配工作，它决定和控制资源和商品的最优分配。我们研究经济效果问题一定要

看到经济的潜力主要不在增加投入方面，而在要素的最优组合方面，在商业、金融等专门从事要素最优组合的经济活动中。

我们上文中讲的生产者最优经济效果问题虽然很抽象，但是实际生活中却比比皆是。我国的农业责任制就是明显的例子。实行责任制后，农业的投入并没有增加，但是农民有了自由支配自己的劳动时间、土地和其它投入的权利，他们精打细算，把劳动时间分配于从事各种农、副、商业活动，使劳动在不同活动中的边际收益都相等，并且小心地购买和调节各种投入，使其边际收益等于其价格，使其边际产出之成本等于产出价格，因而使农业生产率大大提高。这种提高正是要素最优组合或称资源最优分配起的作用。

## §3.8 用线性规划研究生产者的最优经济效果和导出数字式供给函数

如果我们假定生产函数类似于投入产出分析中的生产函数，即产出单位产品消耗的各种投入是固定常数，那么加上资源约束后，我们可以用线性规划来描述生产者的最优经济效果问题。

用线性规划求资源的最优分配比例，制定最优计划在美国各企业中已非常普遍。苏联以诺贝尔奖金获得者、数学家、经济学家康托洛维奇为首的最优计划学派认为社会主义国家用线性规划搞国民经济计划将比资本主义更优越，他们以此为奋斗目标。下面我们用一个简单例子说明用线性规划求最优计划的方法。

设一个经济系统中有两个部门，一个重工业部门，一个轻工业部门。这两个工业部门的生产能力受到设备、人力的

约束。设轻工业的总产出为 $x$，重工业的总产出为 $y$，则有下列约束条件：

$$x \leqslant 5 \tag{3.8.1}$$

$$y \leqslant 4 \tag{3.8.2}$$

它们分别表示轻工业部门的产出能力不能超过 5 单位，而重工业的产出能力不能超过 4 单位。

设生产 1 单位重工业产出需耗费能源 1 单位，而生产 1 单位轻工业产出需耗费能源 0.5 单位，而总的能源只有 5 单位。于是我们有能源约束

$$0.5x + y \leqslant 5 \tag{3.8.3}$$

另外，每个线性规划问题还有目标函数。设此例中轻工业单位产出的收益为 4，重工业单位产出的收益为 1，则目标函数是总收益最大化，即

$$\max\text{：}\quad z = 4x + y \tag{3.8.4}$$

最优计划就是要在式（3.8.1），式(3.8.2)和式(3.8.3)约束之下确定能源的最优分配方案及轻重工业的最优比例，以使目标函数 $z$ 最大化。

以 $x$ 轴为横坐标，以 $y$ 轴为纵坐标，我们可以将 $x = 5$，$y = 4$，$0.5x + y = 5$ 这三个线性方程绘在图 3.6 中。由于 $x \leqslant 5$，所以只有在直线 $x = 5$ 左面的点才会不超过轻工业生产能力。又由于 $y \leqslant 4$，所以只有在 $y = 4$ 直线以下的点才不会超过重工业的生产能力。由于轻重工业的产出量 $x$，$y$ 都不会为负数，所以 $x = 0$ 上方，$y = 0$ 右方的点才有经济意义。除此之外，由于总的能源只有 5 单位，所以只有 $0.5x + y = 5$ 直线左下方的点才不会超过能源约束。图 3.6

中斜线示出了由 5 条直线围成的可行区域。这个区域中的每一点都确定了可行的轻重工业的一组产出量 $x$， $y$，因而也确定了能源的一种分配方案，因为单位 $x$， $y$ 消耗的能源是固定的。

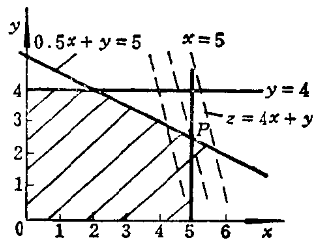



图 3.6

图 3.6 中三条虚线表示目标函数 $z=4x+y$。当 $z$ 取不同常数时，代表这个函数的直线之截距不同。由于决定直线斜率的是 $x$， $y$ 的系数，而它们为固定常数，所以直线的斜率不变。也就是说虚线能以固定斜率在平面平行移动。如果它向右移动脱离了可行区域，则超过了约束条件，因而目标函数值 $z$ 虽很高，却不能实现。如果目标函数直线向左移到容许区域内，则还有生产能力或能源未充分利用，因而 $z$ 也不是最大。所以只有当这条直线与可行区域的一个隅角点相交并使可行区域完全在虚线的左下端时，能使目标函数在不超过约束的条件下最大化。这就是图中的 $P$ 点。它确定了一组最优的 $x^*$， $y^*$。此例中 $P$ 点横坐标 $x^*=5$， $y^*=2.5$， 将它们代入目标函数可求得其最优值 $z^*=4\times5+2.5=22.5$。利用上述解我们可求出轻重工业产出的最优比例 $\frac{x^*}{y^*}=\frac{5}{2.5}=2:1$。由于每单位 $x$ 要消耗 0.5 单位能源，因此分配给轻工业的能源最优量为 $0.5x=0.5\times5=2.5$ 单位；每单位重工业产出要消耗能源 1 单位，因此分配给重工业的能源最优量为 $1\cdot y=1\times2.5=2.5$ 单位。这也就决定了能源分配给轻重工业的最优比例，即各分配给轻重工业 50%。

如果我们不按这个最优比例办事。例如我们让重工业生

产 3.5 单位产出，则分配给重工业的能源为 3.5 单位，分配给轻工业的能源为 5 −3.5=1.5 单位，轻工业由于能源约束只能生产 3 单位产出，则轻重工业的总收益为

$$z = 4 \times 3 + 1 \times 3.5 = 15.5 \text{单位。}$$

比最优计划的总收益 22.5 少了 7 单位。可见重工业从最优产出量 2.5 增至 3.5，反而使全社会总收益减少了 7 单位。这时轻工业产出相对于最优比例来说就成了短线。如果轻工业产出从 3 单位增至 4 单位，则受能源约束，重工业产出从 3.5 降至 3 单位，总收益为

$$z = 4 \times 4 + 3 = 19 \text{单位}$$

即增加 1 单位轻工业产出使社会总收益从 15.5 增至 19，增加了 3.5 单位。

解线性规划问题只有两个变量的问题才能用图解法。数学家旦切克发明的单纯形法是目前解线性规划的最好方法。单纯形法是重复一种试算程序，不断接近最优解。旦切克证明了，一个线性规划问题的可行解构成一个非负的凸集的一个隅角点。若一个线性规划问题有 $m$ 个约束条件即 $m$ 个松弛变量（见下段），和 $n$ 个变量（实际变量），则这个线性规划问题的最优解中共有 $m+n$ 个数，其中 $m$ 个数大于 0，$n$ 个数等于 0。所有可行解中满足以上条件的解共有 $C_{m+n}^{n}$ 组，如果盲目试算可能要计算 $C_{m+n}^{n}$ 次才能找出最优解。用单纯形法可以进行一系列迭代，从一个隅角点移动到相邻的隅角点，保证目标函数不断增大，直至目标函数不再加大为止。这样计算次数可极大地减少。变量越多，约束条件越多，单纯形法效率高的优点就越显著。目前单纯形法的计算机程序已很成熟，国内也有不少标准程序，这为线性规划的大规模应用创造了条件。

单纯形法首先要求把表示约束条件的不等式全部改写成等式，办法是引进**松弛变量**。上文的例子中，轻工业生产能力约束是 $x \leqslant 5$，我们引进松弛变量 $r_1$，$r_1$ 表示闲置而未被利用的轻工业生产能力。例如当轻工业产出为 4 单位时，则松弛变量为 1 单位，即有 1 单位生产能力闲置了，于是不等式 $x \leqslant 5$ 就可以写成等式 $x+r_1=5$。类似地，对重工业生产能力约束 $y \leqslant 4$，可以引进松弛变量 $r_2$，使得 $y+r_2=4$。对能源供应约束 $0.5x+y \leqslant 5$ 可引进松弛变量 $r_3$，使得 $0.5x+y+r_3=5$。$r_2$，$r_3$ 分别代表未被利用的重工业生产能力和能源。

单纯形法要求把所有变量，包括松弛变量写进每个方程，对于目标函数我们可以把其中没有的变量写成系数为 0，列入方程中，约束条件也作类似的处理，于是我们有目标函数

$$\max: \quad z=4x+y+0r_1+0r_2+0r_3$$

约束条件

$$\begin{aligned} 5 &= x+0y+r_1+0r_2+0r_3 \\ 4 &= 0x+y+0r_1+r_2+0r_3 \\ 5 &= 0.5x+y+0r_1+0r_2+r_3 \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

上列 4 个方程可以列成一张单纯形法计算表(见表3.1)，这种表表头不变，表中数据每计算一次就变一次，重复多次迭代就可求出最优解。

这个表的表头就是目标函数方程的简写。从第 4 列开始，第一行数字是目标函数等号右边各变量的系数，第二行就是各变量。

表的第一列 $z_j$ 下的数字表示各变量每单位对目标函数的贡献。第二列是三个松弛变量。第三列是松弛变量最大值，即约束条件常数项。

单纯形法的第一步假设所有实际变量 $x$，$y$ 都等于0，

表 3.1

| $z_j$ | | | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 每单位变量对目标函数的贡献 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 变量 | 数值 | $x$ | $y$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | 变量 |
| 0 | $r_1$ | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | $r_2$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | $r_3$ | 5 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | | | 体矩阵 | | 单位矩阵 | | | |
| | $c_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 各变量每增1单位使目标函数值降低的代价 |
| | $z_j-c_j$ | | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 各变量每增1单位对目标函数的净贡献 |

因此所有松弛变量取其最大值。**体矩阵**的元素就是三个约束条件方程中 $x$，$y$ 的系数，而**单位矩阵**中的元素就是三个约束条件方程中松弛变量的系数。所以体矩阵和单位矩阵记录了约束条件的数据。这两个矩阵的元素又叫**替换系数**。例如 $r_1$ 行 $x$ 列的元素 1 表示每增加 1 单位 $x$，就要使松弛变量 $r_1$ 减少 1 单位，即闲置的轻工业生产能力减少 1 单位；$r_2$ 行 $x$ 列的元素 0 表示 $x$ 增加 1 单位，对松弛变量 $r_2$ 没有影响；$r_3$ 行 $x$ 列的元素 0.5 表示 $x$ 每增加 1 单位就要消耗能源 0.5 单位，因而使闲置的能源（即松弛变量 $r_3$）减少 0.5。

$c_j$ 行的元素是表示各变量增加的代价。$c_j$ 行“数值”列的元素就是目标函数值。因为变量列中的三个元素在单纯形表中是实际在目标函数中出现的变量，它们各自乘上自己对目标函数的单位贡献（$z_j$ 列下的相应数字）加起来就是 $c_j$ 行“数值”列的元素，这也就是目标函数值。表中此值为

$$0r_1+0r_2+0r_3=0$$

$c_j$ 行的其它列的元素表示所有变量在约束条件限制下，每增

加1单位，使目标函数值减少的量，也就是付出的代价。例如$c_j$行$y$列的元素，表示重工业产出每增加1单位付出的代价。根据体矩阵中的相应替换系数可看出，每增加1单位重工业产出将使松弛变量$r_1$减少0单位，$r_2$减少1单位，$r_3$减少1单位，而每单位$r_1$，$r_2$，$r_3$对目标函数的贡献分别为0，0，0。所以$y$增加1单位的代价是$0\times0+0\times1+0\times1=0$。$c_j$行的其它元素是以同样方法算出的。

最后一行$z_j-c_j$的元素算法就是表头第一行$z_j$的各个元素减去$c_j$行相应的元素。它表示各个变量每增加1单位对目标函数的贡献与使目标函数值降低的代价之差，即为每增1单位对目标函数值的净贡献。

写出表3.1后，我们就要找出最佳列。净贡献$z_j-c_j$最大的列就是**最佳列**，增加这一变量的数值无疑会使目标函数值增加得最多。根据表3.1不难判断最佳列就是$x$列。单纯形法要求找出一个**被替换行**，用最佳列的变量替换它，然后写出一个新表。新表中表1中的被替换的松弛变量行将消失，而代之以表3.1中的最佳列的变量。确定被替换行的原则是：

先用表3.1数值列中的各元素除以相应的各行与最佳列相交的交叉元素。

$r_1$行：$5\div1=5$

$r_2$行：$4\div0=\infty$

$r_3$行：$5\div0.5=10$

算出的数中，我们选择一个大于0的最小数，它所在的行就是被替换行。这样确定被替换行可使替换后，不超过最苛刻的约束。表3.1中虚线示出的列为最佳列，虚线示出的行为被替换行。

于是我们可以根据最佳列和被替换行的数据列出表3.2。表 3.2 的表头与表 3.1 一样，只是表 3.1 中被替换行的位置让给了**替换行**。表 3.2 中替换行中各元素是这样计算的。用表 3.1 中被替换行中的各元素除以被替换行与最佳列的交叉元素，得出的数就作为表 3.2 中替换行的相应元素。表 3.2 替换行的行头与表 3.1 中最佳列的列头相同。表 3.2 中其它各行的行头与表 3.1 中一样。表 3.2 各行的元素计算公式如下：

$$u' = u - V \times S \qquad (3.8.6)$$

其中 $u$ 为表 3.1 中的原元素。$V$ 为表 3.1 中 $u$ 元素所在行与最佳列相交的交叉元素，$S$ 为表 3.2 中替换行与 $u'$ 所在列相交的交叉元素。例如表 3.2 中

表 3.2

| $z_j$ | | | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 变量 | 数值 | $x$ | $y$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| 4 | $x$ | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $r_2$ | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $r_3$ | 2.5 | 0 | 1 | -0.5 | 0 | 1 |
| | $c_j$ | 20 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 |
| | $z_j-c_j$ | | 0 | 1 | -4 | 0 | 0 |

| | 数值列 | $x$ 列 | $y$ 列 |
|---|---|---|---|
| $r_2$ 行 | $4-0\times5=4$ | $0-0\times1=0$ | $1-0\times0=1$ |
| $r_3$ 行 | $5-0.5\times5=2.5$ | $0.5-0.5\times1=0$ | $1-0.5\times0=1$ |

其余各行各列的元素算法类同。

从表 3.2 读者不难看出最佳列是 $y$ 列，被替换行是 $r_3$ 行。因为 $5\div0=\infty$，$4\div1=4$，$2.5\div1=2.5$，只有 $r_3$ 被

替换后不会超过最苛刻的约束。于是我们又可算出表 3.3 替换行的各元素。

表 3.3

| $z_j$ | 变量 | 数值 | 4<br>$x$ | 1<br>$y$ | 0<br>$r_1$ | 0<br>$r_2$ | 0<br>$r_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $x$ | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | $r_2$ | 1.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | -1 |
| 1 | $y$ | 2.5 | 0 | 1 | -0.5 | 0 | 1 |
| | $c_j$ | 22.5 | 4 | 1 | 3.5 | 0 | 1 |
| | $z_j-c_j$ | | 0 | 0 | -3.5 | 0 | -1 |

表中各行各列元素的计算程序与上一个表完全相同，读者不妨逐个验算，以熟悉单纯形法的计算方法。

从表 3.3 最下一行数字可以看出净贡献 $z_j-c_j$ 为负数或 0，这意味着任何变量再增加都不能使目标函数值增大了，即线性规划的解不能再改进了。所以"变量"列的各数值就是此线性规划的最优解，$c_j$ 值就是最大目标函数值。即最优解为

$$x^*=5$$
$$y^*=2.5$$
$$r_2^*=1.5$$
$$z^*=22.5$$

表 3.3 $c_j$ 行 $r_1$，$r_2$，$r_3$ 列的三个数字有重要的经济意义。$c_j$ 行 $r_1$ 列的数字 3.5 表示如果松弛变量 $r_1$ 再增加 1 单位，即 $x^*$ 减少 1 单位，目标函数值会减少 3.5 单位。反过来如果第一个约束条件放松 1 单位，即轻工业产出能力从 5 增至 6，那么 $x^*$ 增加 1 单位，目标函数最优值 $z^*$ 会增加 3.5 单位。也就是说第一个约束条件的常数项增加 1 单位，可使

目标函数最优值增加 3.5 单位。这就是轻工业生产能力的“影子价格”。类似地，$c_j$ 行 $r_2$ 列的数字 0 是重工业生产能力的影子价格，影子价格为 0 意味着此种生产是过剩的长线。$c_j$ 行 $r_3$ 列的数字 1 为能源的影子价格。影子价格可以用对偶规划计算。

对偶规划在数学中早就提出来了，但它长期只是被用于使单纯形法的计算简便及验算单纯形法的解。冯·诺依曼揭示了对偶规划的经济意义。丁伯根也证明了对偶规划就是影子价格。这种发现使人们恍然大悟，原来经济学中的核心问题——价值、价格问题与最优经济效果问题本来就是一个问题的两个侧面，即它们是互相对偶的，解出了一个问题也就解出了另一个问题。

我们首先介绍对偶规划，然后再来解释其经济意义。

任何一个使目标函数最大化的线性规划问题，都有唯一的使目标函数最小化的对偶的线性规划问题；反过来任何使目标函数最小化的线性规划问题，也有唯一的使目标函数最大化的对偶的线性规划问题。初始线性规划问题叫**原问题**，与其对偶的叫**对偶问题**。解原问题的叫**原规划**，解对偶问题的叫**对偶规划**。两个对应的线性规划互为原规划和对偶规划。原规划和对偶规划之间有如下种种对称性。

（1）原规划若有 $n$ 个变量，则对偶规划有 $n$ 个约束条件；原规划若有 $m$ 个约束条件，则对偶规划有 $m$ 个变量；

（2）原规划目标函数为求极大，则对偶规划目标函数为求极小，反之亦然。原规划的最大值（或最小值）与对偶规划的最小值（或最大值）相等；

（3）原规划目标函数中变量的系数等于对偶规划中相应约束条件的常数项，原规划约束条件中的常数项等于对偶

规划目标函数中相应变量的系数；

（4）原规划约束条件中的系数矩阵与对偶规划中的系数矩阵互为转置矩阵，原规划约束条件中不等号与对偶规划中约束条件的不等号方向相反。若原规划为求目标函数最大，则其约束条件为不大于号，而对偶规划约束条件为不小于号，反之反是；

（5）若原规划约束条件为$m$个，变量为$n$个，则将最优解代入约束条件后，必有$n$个约束条件的等号成立，有$(m-n)$个约束条件不等号成立，对应于这$(m-n)$个约束条件的对偶规划的变量其最优解等于0；而原规划最优解中等于0的变量，对应于这些变量的对偶规划约束条件的不等号成立，与原规划最优解中大于0的变量对应的对偶规划约束条件的等号成立。

以上五条规则已由数学中的对等定理给出证明。对等定理以 Kuhn-Tucker 定理为基础。

假定$f(x)$为图 3.7 所示的函数。$f(x)$在$x\geqslant 0$的约束下取极大值的条件有下面几种情况：

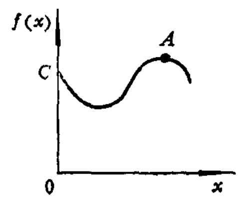


图 3.7

（1）对于图中$A$点邻域而言，极大化的必要条件为

$$\frac{df}{dx}=0,\quad x>0 \tag{3.8.7}$$

（2）图中$C$点在领域的边界上，因此左边的微分不存在，在这种情况下只有函数递减，边界点才是极大值，所以极大化的必要条件为

$$\frac{\partial f^+}{\partial x}\leqq 0,\quad x=0 \tag{3.8.8}$$

式（3.8.7）和式（3.8.8）可合写为一个式子

$$\frac{\partial f}{\partial x} \leqq 0, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (3.8.9)$$

如果我们加上不等式约束

$$g(x) \leqq 0 \qquad (3.8.10)$$

则使 $f(x)$ 极大化有两种可能的情况：

（1）若 $g(x)=0$，则约束有效，拉格朗日乘数 $\lambda>0$；

（2）若 $g(x)<0$，则约束无效，拉格朗日乘数 $\lambda<0$。

若有多个变量多个约束条件，则数学规划中 Kuhn-Tucker 条件为：

使 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在约束

$$g_j(x_1, \cdots, x_n) \leqq 0, \quad j=1, \cdots, m \qquad (3.8.11)$$

$$x_i \geqq 0, \quad i=1, \cdots, n \qquad (3.8.12)$$

之下极大化的必要条件为：

对于拉格朗日函数

$$L = f + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_m g_m \qquad (3.8.13)$$

我们有

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \leqq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0, \quad i=1, \cdots, n \qquad (3.8.14)$$

且

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geqq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \lambda_j = 0, \quad j=1, \cdots, m \qquad (3.8.15)$$

根据 Kuhn-Tucker 条件我们有**对等定理**。为使叙述通俗，我们用实例说明对等定理。

设有原问题如下：

目标函数：max：$z=20x+30y$

约束条件：

$$\begin{aligned} x \quad\quad &\leqslant 7 \\ y &\leqslant 5 \\ x+2y &\leqslant 12 \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

作拉氏函数

$$L=20x+30y+\lambda_1(7-x)+\lambda_2(5-y)$$
$$+\lambda_3(12-x-2y) \quad (3.8.17)$$

将上式乘以－1则得到原问题的反面问题：

$$-L=-20x-30y-\lambda_1(7-x)-\lambda_2(5-y)$$
$$-\lambda_3(12-x-2y)=-7\lambda_1-5\lambda_2-12\lambda_3$$
$$-x(20-\lambda_1-\lambda_3)-y(30-\lambda_2-2\lambda_3) \quad (3.8.18)$$

求原目标函数极大化，就等价于求其目标函数负值极小化。$L$对$x$，$y$的极大值，就是$-L$对$x$，$y$的极小值。而$L$对$\lambda$的极小值，就是$-L$对$\lambda$的极大值。所以我们将式(3.8.18)对$\lambda$极大化，就相当于把

$$L=7\lambda_1+5\lambda_2+12\lambda_3+x(20-\lambda_1-\lambda_3)$$
$$+y(30-\lambda_2-2\lambda_3) \quad (3.8.19)$$

对$\lambda$极小化。于是我们有如下线性规划问题：

目标函数　min：$c=7\lambda_1+5\lambda_2+12\lambda_3$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad +\lambda_3 &\geqslant 20 \\ \lambda_2+2\lambda_3 &\geqslant 30 \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \quad (3.8.20)$$

这就是对偶规划。从式（3.8.20）不难看出对偶规划的第（1），（2），（3），（4）条规则成立。原规划两个变量$x$，$y$，对偶规划两个约束条件；原规划三个约束条件，对偶规划三个变量$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$；原规划目标函数系数20，30就是对偶规划约束条件常数项；而原规划约束条件常数项就是对偶规划目标函数的系数。原规划约束条件系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

而对偶规划约束条件系数矩阵正好是它的转置，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

根据 Kuhn-Tucker 条件，对于约束条件为不等式的数学规划问题，目标函数取极值的必要条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1^*}\lambda_1^* = (7 - x^*)\lambda_1^* = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2^*}\lambda_2^* = (5 - y^*)\lambda_2^* = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_3^*}\lambda_3^* = (12 - x^* - 2y^*)\lambda_3^* = 0 \end{cases} \tag{3.8.21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^*}x^* = (20 - \lambda_1^* - \lambda_3^*)x^* = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y^*}y^* = (30 - \lambda_2^* - 2\lambda_3^*)y^* = 0 \end{cases} \tag{3.8.22}$$

这就证明了对偶规划的第（5）条规则，即原规划最优解若使约束条件等号成立，例如 $x^* = 7$，即 $7 - x^* = 0$，则相应的对偶变量最优解大于 0，例如 $\lambda_1^* > 0$。若原规划约束条件不等号成立，例如 $y^* < 5$，即 $5 - y^* > 0$，则对应的对偶变量最优解等于 0，例如 $\lambda_2^* = 0$。式（3.8.22）亦有类似的意义。

将式（3.8.22）展开整理后得

$$20x^* + 30y^* = \lambda_1^* x^* + \lambda_3^* x^* + \lambda_2 y^* + 2\lambda_3^* y^* \tag{3.8.23}$$

从式（3.8.21）可导出

$$7\lambda_1^*+5\lambda_2^*+12\lambda_3^*=\lambda_1^*x^*+\lambda_3^*x^*+\lambda_2^*y^*+2\lambda_3^*y^* \quad (3.8.24)$$

所以 $$20x^*+30y^*=7\lambda_1^*+5\lambda_2^*+12\lambda_3^* \quad (3.8.25)$$

由于 $$\max \quad z=20x^*+30y^*$$
$$\min \quad c=7\lambda_1^*+5\lambda_2^*+12\lambda_3^*$$

所以 $$\max \quad z=\min c \quad (3.8.26)$$

令 $\max z=\pi$，又令 $\lambda_1^*$，$\lambda_2^*$，$\lambda_3^*$ 的系数为 $b_1$，$b_2$，$b_3$，则

$$\frac{\partial\pi}{\partial b_1}=\lambda_1^*,\quad \frac{\partial\pi}{\partial b_2}=\lambda_2^*,\quad \frac{\partial\pi}{\partial b_3}=\lambda_3^* \quad (3.8.27)$$

其中 $\pi$ 为原问题目标函数最大值，$b_1$，$b_2$，$b_3$ 为资源最大供应量，即原问题约束条件常数项，$\lambda_1^*$，$\lambda_2^*$，$\lambda_3^*$ 为对偶规划最优解。于是我们证明了对偶规划最优解就是原问题目标函数最优值对约束条件常数项的一阶偏导数，即资源的边际价值。这就证明了对偶规划最优解的经济意义，它就是影子价格。当原规划目标函数为费用时，对偶规划最优解就是边际成本，即影子费用。

对于前文所举的轻重工业最优比例问题来说，原问题为：

目标函数　max：$z=4x+y$

约束条件

$$x+0y\leqslant 5$$
$$0x+y\leqslant 4$$
$$0.5x+y\leqslant 5$$

对偶问题：

目标函数　min：$c=5p_1+4p_2+5p_3$

约束条件

$$p_1+0p_2+0.5p_3\geqslant 4$$
$$0p_1+p_2+p_3\geqslant 1$$

其中 $p_1$ 为轻工业生产能力的影子价格，$p_2$ 为重工业生产能力的影子价格，$p_3$ 为能源的影子价格。$c$ 为对三种产出的总估价。约束条件反映了轻工业部门和重工业部门单位产品的影子收益不小于销售收益。而目标函数反映了买方要求对

总的影子收益估价最小。

我们已解出原规划最优解

$$x^*=5, \quad y^*=2.5$$

代入原规划约束条件，使第一个约束条件等号成立，所以相应的对偶变量 $p_1>0$。而原规划第二个约束条件不等号成立，因为 $y^*=2.5<4$。所以相应的对偶变量 $\lambda_2=0$。又由于原规划两个最优解 $x^*$，$y^*$都大于0，所以对偶规划两个约束条件都是等号成立。将 $p_2=0$ 代入，则有方程组

$$p_1+0.5p_3=4$$

$$p_3=1$$

联立求解，可得

$$p_1=3.5, \quad p_2=0, \quad p_3=1$$

这与最后一张单纯形表求出的影子价格完全一致。

在§3.1中所述的投入产出生产函数若与资源约束相结合，则可以写成线性规划问题。这就是以投入产出生产函数为基础的生产者最优经济效果问题。设有工业、农业、服务业三个部门，其产出量分别用$x_1$，$x_2$，$x_3$表示，它们的最终产出分别用 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 表示。投入产出系数矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8.28}$$

由于 $a_{11}$，$a_{21}$，$a_{31}$ 为生产单位 $x_1$ 所消耗的三部门产品，若三部门产品价格分别为 $p_1$，$p_2$，$p_3$，则单位工业产出的成本为

$$p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31} \tag{3.8.29}$$

同理，单位农业产出的成本为

$$p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32} \tag{3.8.30}$$

单位服务业产出之成本为

$$p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33} \tag{3.8.31}$$

若三部门产出用价值单位表示，投入产出系数以现价为基础用价值形态表示，则 $p_1$，$p_2$，$p_3$ 分别表示对现价的修正系数，它是一种特殊的价格指数。令行向量 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=(p_1,\ p_2,\ p_3) \tag{3.8.32}$$

则三部门单位产品成本可用矩阵形式记为

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31} \\ p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32} \\ p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.8.33}$$

令三部门的单位产出利润分别为 $n_1$，$n_2$，$n_3$，令向量 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.8.34}$$

则单位产出利润亦可用矩阵形式记为

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}'-\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}' \tag{3.8.35}$$

如果总的产出向量为$\boldsymbol{X}$，则三部门总利润为

$$\pi=\boldsymbol{N}'\boldsymbol{X} \tag{3.8.36}$$

生产者最优经济效果问题就是将这一利润函数最大化。

设生产资源有两种，一种是资金，其总量为 $\bar{b}_1$，另一种是劳动，其总量为 $\bar{b}_2$。生产单位工业产出占用的资金量和劳动量分别为 $b_{11}$，$b_{21}$；生产单位农业产出占用的资金量和劳动量分别为 $b_{12}$，$b_{22}$；生产单位服务业产出占用的资金量和劳动量分别为 $b_{13}$，$b_{23}$，于是我们有资源占用系数矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}。 \tag{3.8.37}$$

若三部门产出为$\boldsymbol{X}$，则资源约束可记为

$$\boldsymbol{BX}\leqslant\overline{\boldsymbol{B}} \tag{3.8.38}$$

其中列向量$\overline{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_1,\ \bar{b}_2)'$。上式展开则为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3&\leqslant\bar{b}_1 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3&\leqslant\bar{b}_2 \end{aligned} \tag{3.8.39}$$

上式意味着三部门占用的资金总量不大于可利用的资金量$\bar{b}_1$；而三部门占用的劳动总量不大于可利用的劳动总量$\bar{b}_2$。将约束条件式（3.8.38）与目标函数式（2.8.36）相结合，就是一个完整的线性规划问题，即

$$\max:\ \pi=\boldsymbol{N}'\boldsymbol{X} \tag{3.8.40}$$

服从约束 $\boldsymbol{BX}\leqslant\overline{\boldsymbol{B}}$

以上讨论可以推广到有$n$种产品和$m$种资源的情形。这时$\boldsymbol{A}$矩阵为$n\times n$方阵，$\boldsymbol{B}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{I}$为$n\times n$单位矩阵，$\boldsymbol{X}$为$n$维列向量，$\boldsymbol{P}$为$n$维行向量，$\overline{B}$为$m$维列向量。

给定价格$\boldsymbol{P}=(p_1,\ \cdots,\ p_n)$和$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$矩阵中的系数及$\overline{B}=(\bar{b}_1,\ \cdots,\ \bar{b}_m)$，则我们从式（3.8.40）线性规划问题中可解出最优产出计划$\boldsymbol{X}^*=(x_1^*,\ \cdots,\ x_n^*)'$，并用对偶规划解出$m$种资源的影子价格$\boldsymbol{\Lambda}^*=(\lambda_1^*,\ \cdots,\ \lambda_m^*)$。如果价格$P$变化，则目标函数的权重改变，最优解$\boldsymbol{X}^*$亦会随之而变化，影子价格$\boldsymbol{\Lambda}^*$也会改变。所以最优生产计划$\boldsymbol{X}^*$和资源影子价格$\boldsymbol{\Lambda}^*$是产出价格$\boldsymbol{P}$的函数。本节最初举的线性规划例子中，若轻工业产出的价格从4单位降至0.5单位，重工业产出的价格从1单位升至2单位，则线性规划最优解从5单位

轻工业品，2.5单位重工业品变成2单位轻工业品，4单位重工业品。可见一种产品的价格上升，则用线性规划算出的最优生产量会上升。这是只考虑生产者利润最大化的供给函数，消费者是否需要，产品是否卖得出去，这种供给函数不能确定，而只能依靠需求函数来确定。不过这种供给函数反映了生产者追求其局部最优经济效果的规律，产品价格越高，则生产者的最优产出量也越大。

一般而言，设线性规划问题式（3.8.40）之最优解$\boldsymbol{X}^*$为价格向量$\boldsymbol{P}$的函数，这就是总产出量的供给函数

$$\boldsymbol{X}^* = \phi(\boldsymbol{P}) \tag{3.8.41}$$

需要强调的是，用线性规划求出的最优生产计划$\boldsymbol{X}^*$不具备唯一性，价格$\boldsymbol{P}$不同时，$\boldsymbol{X}^*$不同，所以实际上以不合理的现价为基础解出的线性规划最优解并不是真正的最优计划，它只是反映了生产者追求利润最大化的供给规律的一个片断。有无穷多个价格$\boldsymbol{P}$，相应的无穷多个$\boldsymbol{X}^*$可以反映出这种生产者追求利润的总规律，它就是供给函数。所以供给函数是无穷多个线性规划问题构成的，它比单个线性规划问题更全面和深刻。另外要强调的是这种供给函数写不出一个个的解析式，所有产品的最优供给量，只有在给定一组价格$\boldsymbol{P}$时，才能用线性规划式（3.8.40）算出。因此供给函数式（3.8.41）是数学式供给函数。

同样，资源的影子价格$\boldsymbol{\Lambda}^*$亦是产出价格$P$的函数：

$$\boldsymbol{\Lambda}^* = \psi(\boldsymbol{P}) \tag{3.8.42}$$

与$\boldsymbol{X}^*$一样，若不考虑消费者最优经济效果而只考虑生产者最优经济效果，并不能确定唯一的资源影子价格，因为它是产出价格的函数。这也是一种数字式函数，给出若干$\boldsymbol{P}$，然后算出式（3.8.40）的若干个对偶解，我们只能如此数学式

地给出这个函数。

若资源向量 $\overline{B}$ 变化，则影子价格 $\boldsymbol{\Lambda}^*$ 亦会变化，不过 $\bar{b}_j$ 上升，相应的影子价格 $\lambda_j^*$ 反而下降，所以二者的关系可写为生产者对投入的需求函数

$$\overline{B}=\tau(\boldsymbol{\Lambda}^*) \tag{3.8.43}$$

这种需求函数可利用线性规划的敏感性分析和参数规划给出。

设最终产出列向量为 $\boldsymbol{C}^s=(c_1, \cdots, c_n)'$ 根据投入产出分析，最终产出与最优产出 $\boldsymbol{X}^*$ 的关系由下式给出

$$\boldsymbol{C}^s=(\boldsymbol{I}-A)\boldsymbol{X}^* \tag{3.8.44}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵，$\boldsymbol{A}$为列昂节夫投入产出系数矩阵。

将（3.8.41）式代入上式，则最终产品生产量 $\boldsymbol{C}^s$ 可写为价格 $P$ 的函数，这就是最终产品的供给函数：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^s&=F(\boldsymbol{P})\\&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\Phi(\boldsymbol{P})\end{aligned} \tag{3.8.45}$$

它也是数学式供给函数。

至此我们仔细讨论了不考虑消费者的生产者最优经济效果问题。而上一章讨论了不考虑生产者的消费者最优经济效果问题，这两种局部最优经济效果都不唯一。下一章我们将消费者的最优经济效果与生产者的最优经济效果相结合来研究全社会的综合最优经济效果问题，并且计算对偶的最优价格，同时确定唯一的消费者最优经济效果和生产者最优经济效果且求出唯一的资源影子价格。

# 第四章　消费者和生产者的综合最优经济效果

## §4.1　Pareto最优境界（Pareto均衡）

第二章我们讨论了消费者的最优经济效果，第三章我们讨论了生产者的最优经济效果。消费者追求最优经济效果的行为规律表现为商品的需求函数和劳动、储蓄资金的供给函数，最优需求量和最优供给量不是唯一的，它是产品价格、劳动工资率和储蓄利息率的函数。而生产者追求最优经济效果的行为规律表现为生产者对产出的供给函数和对投入的需求函数，最优供给量和最优需求量也不是唯一的，它们是产出价格和投入价格的函数。

本章我们讨论消费者最优经济效果是否能与生产者最优经济效果相结合，以确定唯一的全社会综合最优经济效果？在什么条件下这二者可以协调？本节首先讨论在没有价格制度的条件下，如果我们知道消费者的效用函数、生产者的生产函数和资源约束，怎样制定一个最优生产和消费计划，以便在现有资源和技术条件下使人民的福利，即总效用极大化，这就是Pareto最优境界。

我们从最简单的有两个消费者，两种最终产品和两种生产资源的经济系统，简称为 $2\times2\times2$ 系统着手分析，然后不难将此种分析推广到多个消费者，多种产品和多种资源的情形。令第一位消费者的效用函数为

$$U^1 = U^1(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}) \qquad (4.1.1)$$

$$U_i^1 = \frac{\partial U^1}{\partial x_{1i}} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

其中$x_{11}$表示第一位消费者消费的第一种产品量，$x_{12}$表示第一位消费者消费的第二种产品量，$x_{13}$表示第一位消费者的休息时间，它是一种特殊的消费品，休息时间越多，则效用越大，即效用对$x_{13}$的一阶偏导数$U_1^1 > 0$。反过来$-x_{13}$为休息时间的减少量，即劳动时间的增加量，即劳动时间$-x_{13}$越多，直接效用越少。当然劳动可以生产产品$x_{11}, x_{12}$，所以它可以间接增加效用。$x_{14}$是第一位消费者手持资金量，手持资金量越多，交换产品的方便也越大，方便也是种效用，所以$x_{14}$增加，效用会增加，即$U_4^1 > 0$。$-x_{14}$是手持资金的减少量，即储蓄资金的增加量，手持资金量越少，则储蓄越多，交换商品时，要去取存款，增加了不方便，也就是储蓄$-x_{14}$增多使直接效用下降。当然资金可以用来生产消费品$x_{11}$，$x_{12}$，而消费品增多可使效用增加，即$U_1^1 > 0, U_2^1 > 0$，所以储蓄增多可间接使效用增加。手持现金量也可视为一种特殊的消费品数量，其效用是能满足所谓"灵活偏好"。$U^1$对各种消费品数量的一阶偏导数$U_i^1$大于0意味着各种消费品增加，效用函数递增。值得注意的是，劳动$(-x_{13})$和储蓄$(-x_{14})$增加，效用会减少。

又设第二位消费者的效用函数为

$$U^2 = U^2(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}) \qquad (4.1.2)$$

$$U_i^2 = \frac{\partial U^2}{\partial x_{2i}} > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

其中$x_{21}$表示第二位消费者消费的第一种产品量，$x_{22}$表示第二位消费者消费的第二种产品量，$x_{23}$表示他的休息时间，$x_{24}$为他的手持资金量。

社会总的产品量分别为$x_1$（第一种产品总量），$x_2$（第二种产品总量）。第一种产品总量$x_1$等于两位消费者消费的第一种产品量$x_{11}$, $x_{21}$之和；而第二种产品总量$x_2$等于两位消费者消费的第二种产品量$x_{12}$，$x_{22}$之和，即

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}&=x_1 \\ x_{12}+x_{22}&=x_2 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

设两人拥有的时间总量为$x_3^0$，两人拥有的资金总量为$x_4^0$，它们分别等于每人拥有量之和，即

$$\begin{aligned} x_{13}+x_{23}&=x_3^0 \\ x_{14}+x_{24}&=x_4^0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

又设生产第一种产品的生产函数为

$$x_1=f^1(x_3, x_4) \tag{4.1.5}$$

生产第二种产品的生产函数为

$$x_2=f^2(x_3, x_4) \tag{4.1.6}$$

联立式（4.1.5）和式（4.1.6）可解出$x_3$，$x_4$，即用$x_1$, $x_2$表出$x_3$, $x_4$：

$$\begin{aligned} x_3&=\varphi^1(x_1,\ x_2) \\ x_4&=\varphi^2(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

令上式中的$x_3$，$x_4$分别等于有限的资源总量$x_3^0$, $x_4^0$，则上式可写为

$$\begin{aligned} x_3^0&=\varphi^1(x_1,\ x_2) \\ x_4^0&=\varphi^2(x_1,\ x_2) \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

将上两式合并，则可写出转换函数

$$F(x_1, x_2, x_3^0, x_4^0)=0 \tag{4.1.9}$$

也就是说将多个生产函数与多个资源约束相结合，可以写出一个描述技术和资源约束的总的约束条件。它表示在有限的时间$x_3^0$和有限的资金$x_4^0$约束下，多生产$x_1$，就要少生产$x_2$；

多生产 $x_2$，就要少生产 $x_1$。将式（4.1.3）中的 $x_{11}+x_{21}=x_1$，$x_{12}+x_{22}=x_2$ 和式（4.1.4）中的 $x_{13}+x_{23}=x_3^0$，$x_{14}+x_{24}=x_4^0$ 代入上式，则有

$$F(x_{11}+x_{21},\ x_{12}+x_{22},\ x_{13}+x_{23},\ x_{14}+x_{24})=0 \quad (4.1.9')$$

如果承认效用函数的基数论，则不同人的效用可以相加，综合最优经济效果问题就是在(4.1.10)约束下，使两人的效用函数式（4.1.1）与式（4.1.2）之和极大化。由于基数论站不住脚，人与人之间很难确定统一的效用单位，因此人与人之间的效用无法比较，也不便加总。我们只能固定第二个消费者的效用在某个常数水平 $U_0^2$，于是综合最优经济效果问题变成

$$\max:\ U^1=U^1(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14})$$

服从约束 $$U_0^2=U^2(x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}) \quad (4.1.10)$$

$$F(x_{11}+x_{21}, x_{12}+x_{22}, x_{13}+x_{23}, x_{14}+x_{24})=0$$

作拉格朗日函数

$$L=U^1-\lambda_1(U_0^2-U^2)-\lambda^2 F \quad (4.1.11)$$

令 $U_i^1=\frac{\partial U^1}{\partial x_{1i}}$，$U_i^2=\frac{\partial U^2}{\partial x_{2i}}$，$F_1=\frac{\partial F}{\partial x_{j1}}$，$F_2=\frac{\partial F}{\partial x_{j2}}$，$F_3=\frac{\partial F}{\partial x_{j3}}$，$F_4=\frac{\partial F}{\partial x_{j4}}$，$j=1, 2$，则最优化的一阶条件为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_{11}}&=U_1^1-\lambda_2F_1=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{12}}&=U_2^1-\lambda_2F_2=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{13}}&=U_3^1-\lambda_2F_3=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{14}}&=U_4^1-\lambda_2F_4=0
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_{21}}&=\lambda_1 U_1^2-\lambda_2 F_1=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{22}}&=\lambda_1 U_2^2-\lambda_2 F_2=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{23}}&=\lambda_1 U_3^2-\lambda_2 F_3=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{24}}&=\lambda_1 U_4^2-\lambda_2 F_4=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4.1.12)$$

上列各式可改写为

$$U_1^1=\lambda_2 F_1 \qquad (4.1.13)$$
$$U_2^1=\lambda_2 F_2 \qquad (4.1.14)$$
$$U_3^1=\lambda_2 F_3 \qquad (4.1.15)$$
$$U_4^1=\lambda_2 F_4 \qquad (4.1.16)$$
$$\lambda_1 U_1^2=\lambda_2 F_1 \qquad (4.1.17)$$
$$\lambda_1 U_2^2=\lambda_2 F_2 \qquad (4.1.18)$$
$$\lambda_1 U_3^2=\lambda_2 F_3 \qquad (4.1.19)$$
$$\lambda_1 U_4^2=\lambda_2 F_4 \qquad (4.1.20)$$

加上约束条件

$$U_0^2=U^2,\quad F=0$$

则共有10个方程，其中未知数为$x_{11}$, $x_{12}$, $x_{13}$, $x_{14}$, $x_{21}$, $x_{22}$, $x_{23}$, $x_{24}$, $\lambda_1$, $\lambda_2$亦有10个。所以只要给定参数$x_3^0$, $x_4^0$, $U_0^2$，则可解出每人用来生产各种产品的最优劳动支出量和资金投入量，以及各种产品的最优产出量和产品在各人之间的最优分配量。这里并没有价格参预其中。以上推导从理论上证明了，只要我们能完全掌握每个人的效用函数，各种产品的生产函数和资源约束，就可以用数字中的条件极值法则算出一个最优生产、消费计划，以利用有限的资源使人民过得最幸福。这就是Pareto最优境界。它是一种最优经济计划思想。但是，

每个人的效用函数各有不同，任何人也不可能清楚地了解他人的效用函数，各人的效用函数只有自己才清楚。所以不依靠价格制度和市场，进行上述最优经济计划只是一种理论上的理想境界。实际上任何非奴隶制，非战时的经济制度都是消费者分散决策，而不是集中制定最优消费计划。也不曾出现过不要价格制度的成功的经济计划。中国历史上有些封建帝王企图取消价格制度，当代个别国家也曾尝试不要价格制度，结果都以经济的迅速崩溃而告终。在某些经济制度下，政府集中制定生产计划（如苏联），而在另一些经济制度下，政府确定部分生产计划，而大部分生产的最优经济效果问题让企业分散决策（如匈牙利）。但所有这些国家中消费者都是分散决策的。也有一些地区，消费和生产完全是分散决策（例如香港）。分散进行经济决策能不能达到整体最优经济效果？分散的经济决策是怎样通过价格制度达到Pareto最优境界的？为了分析这些问题，我们对式（4.1.13）至式（4.1.20）进一步分析，与局部最优经济效果的条件对照，并引入价格因素。

用式（4.1.13）除以式（4.1.14），再用式（4.1.17）除以式（4.1.18），我们得到

$$\frac{U_1^1}{U_2^1}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{U_1^2}{U_2^2} \tag{4.1.21}$$

回顾消费者的最优经济效果条件，消费者只有调节各种消费量，使商品的边际替代率等于相应的价格比时，才能在有限的收入下使效用最大化。即

$$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^1=\frac{U_1^1}{U_2^1}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^1 \tag{4.1.22}$$

其中上角“1”表示对第一位消费者而言。$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^1$为两

种商品对第一位消费者的边际替代率，即相对效用。而 $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^1$ 为第一位消费者面临的两种商品之价格比。$r_1$ 为第一种商品的价格，$r_2$ 为第二种商品的价格。

对于第二位消费者而言，其局部最优经济效果的条件是商品的边际替代率等于他面临的相应的商品比价，即

$$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2=\frac{U_1^2}{U_2^2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad (4.1.23)$$

上角“2”表示对第二位消费者而言。

回顾生产者局部最优经济效果的条件。生产者只有调节各种产品的生产比例，使不同产品的边际转换率等于相应的产品价格比，才能在技术和资源约束下使利润最大化。即

$$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)_F=\frac{F_1}{F_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_F \qquad (4.1.24)$$

下角“$F$”表示对于生产者而言。$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)_F$ 为对生产者而言的商品边际转换率，即增加微小 $x_1$ 的产出，在资源有限和技术一定的条件下必须减少 $x_2$ 的数量。$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_F$ 为生产者面临的两种产品的比价。$F$ 为转换函数。

根据以上分析，(4.1.21) 可改写为

$$\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^1=\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)_F=\left(-\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 \qquad (4.1.25)$$

这是整体最优经济效果的条件，即某两种商品对不同消费者的边际替代率都相等且等于生产的边际转换率。如果令

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^1=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_F=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \qquad (4.1.26)$$

则上述整体最优经济效果的条件式 (4.1.25) 与消费者局部最优经济效果条件式 (4.1.22)，式 (4.1.23)及生产者利润最大化的条件式 (4.1.24) 完全等价。也就是说，只要存在有

效率竞争，任何人也不能操纵价格，则生产者和消费者都只能把价格当作常数加以接受，并且所有消费者和生产者都面临相同的比价，那么生产者追求最大利润自动与消费者追求最大效用协调，即局部最优经济效果等价于整体最优经济效果。

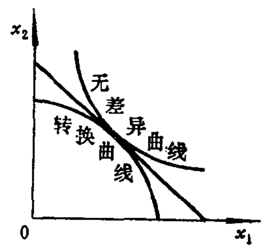


图 4.1

上述分析的几何意义如图4.1所示。图中效用函数的无差异曲线与转换曲线相切，即边际替代率等于边际转换率。由于无差异曲线和转换曲线有一条公共的切线，其斜率就是比价$\frac{r_1}{r_2}$，并且就是边际替代率和边际转换率。

将式（4.1.15）除以式（4.1.16），并将式（4.1.19）除以式（4.1.20）可得：

$$\frac{U_3^1}{U_4^1}=\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)^1=\frac{F_3}{F_4}=\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)_F=\frac{U_3^2}{U_4^2}=\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)^2 \tag{4.1.27}$$

上式说明整体最优经济效果的条件是休息时间与手持现金在保持效用不变时的边际替代率对于不同消费者相等，并且等于保持产出不变时，劳动和资金的边际替代率。上角“1”，“2”分别表示两位消费者。$\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)_F$表示生产者用劳动和资金生产一定量产品时，增加微小$x_3$，可以减少多少$x_4$而使产出量不变。所以它是生产投入的边际替代率。与前述分析相同，由于消费者的局部最优经济效果的条件为

$$\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)^1=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^1,\ \left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)^2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \tag{4.1.28}$$

其中$p_1$为工资率，$p_2$为利息率。上式为手持资金与休息时间对于消费者的边际替代率等于工资率与利息率之比。而生产者最优经济效果的条件为

$$\left(-\frac{dx_4}{dx_3}\right)_F=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_F \tag{4.1.29}$$

即生产投入资金和劳动的边际替代率等于工资率和利息率对于生产者的比率。所以只要令

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^1=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_F \tag{4.1.30}$$

则局部最优经济效果的条件完全与整体最优经济效果的条件一致。其几何意义如图4.2所示。图中$x_3$表示休息时间，$-x_3$表示劳动时间，即不休息时间；$x_4$表示手持资金量，$-x_4$表示储蓄额，即非手持资金额。休息时间和手持资金越多，则效用的无差异曲线越靠右上方；而劳动和储蓄越多，则产出的等产量线越靠左下方，由于左方、下方是劳动和储蓄的正方向，所以越靠左下方的等产量线表示产量越高。生产者与消费者对时间和资金是竞争对手，这表现二者的坐标系方向相反。$x_3$，$x_4$是消费者的正方向，而$-x_3$，$-x_4$是生产者的正方向，即休息时间越少，消费者手持现金越少，则生产者的劳动投入和资金投入越多。只有当等产量线与无差异线相切，即时间和资金对于生产者的边际替代率和对于消费者的边际替代率相等时，才能达到整体最优经济效果。由于公共的切线斜率就是工资率与利息率之比，所以两种边际替代率还等于工资率与利息率之比。

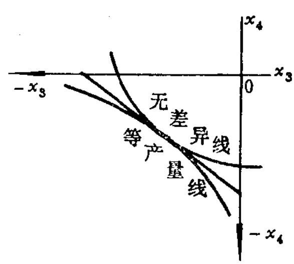


图 4.2

用式（4.1.15）除以式（4.1.13），且用式（4.1.19）除以式（4.1.17），我们得到：

$$\frac{U_3^1}{U_1^1}=\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)^1=\frac{F_3}{F_1}=\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)_F=\frac{U_3^2}{U_1^2}=\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)^2 \tag{4.1.31}$$

也就是说整体最优经济效果的条件是，增加休息时间$x_3$减少$x_1$的消费量对不同消费者的边际替代率（保持效用不变）全相等且等于休息时间 $x_3$ 与消费品 $x_1$ 在生产中的边际转换率 $\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)_F$。由于劳动量为 $-x_3$，所以用劳动生产 $x_1$ 的边际产出率为$\frac{dx_1}{d(-x_3)}=\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)_F$。它表示其它产出、投入不变的情况下减少微小休息时间，即增加微小劳动可使消费品 $x_1$ 增加多少。与前文的分析类似，由于局部最优经济效果的条件为

$$\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)^1=\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^1,$$

$$\left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)^2=\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2,\ \left(-\frac{dx_1}{dx_3}\right)_F=\left(\frac{p_1}{r_1}\right)_F \tag{4.1.32}$$

所以只要令

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^1=\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^2=\left(\frac{p_1}{r_1}\right)_F \tag{4.1.33}$$

则局部最优经济效果的条件等价于整体最优经济效果的条件，其几何意义如图 4.3 所示。对于消费者而言，正方向是 $x_1$，$x_3$，即消费的$x_1$越多，休息时间 $x_3$越多，效用越高。而生产者的正方向是$x_1$，$-x_3$，即投入的劳动$-x_3$越多，在其它投入和产出不变的条件下，$x_1$的产出也越多。转换曲线表示其它投入产出不变时，增加$x_3$（休息时间）就会使 $x_1$因缺乏劳动投入而下降，反过来也就是说增加劳动投入$-x_3$，$x_1$

就会增多。上图说明当劳动投入与产品的转换曲线与休息时间和消费品的无差异曲线相切时，才能达到整体最优经济效果。其中$x_1$对于生产者来说是售出的产品，对于消费者来说是购入的消费品，两条相切的曲线共一条切线，其斜率既是边际替代率，又是边际转换率即劳动的边际产出率，还是工资率与消费品价格的比率。也就是说当工资率与消费品价格之比变化时，消费者(同时是劳动者)就会调节自己休息时间和劳动时间的比率且改变消费品购买量，以使休息对消费品的边际替代率等于消费品价格与工资率之比。如果工资太低，则劳动（即减少休息）赚来的钱购买的消费品给他带来的幸福不如不劳动休息给他带来的幸福，在这种情况下他就会减少劳动增加休息，以使其效用最大化。即使用超经济手段强制他劳动，他也会消极怠工，出工不出力，或出力不出智慧。

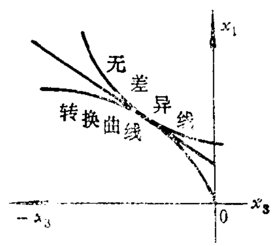



图 4.3

用式（4.1.15）除以式（4.1.14），再用式（4.1.19）除以式（4.1.18），我们有

$$\frac{U_3^1}{U_2^1}=\left(-\frac{dx_2}{dx_3}\right)^1=\frac{F_3}{F_2}=\left(-\frac{dx_2}{dx_3}\right)_F$$

$$=\frac{U_3^2}{U_2^2}=\left(-\frac{dx_2}{dx_3}\right)^2 \qquad (4.1.34)$$

即休息与第二种产品$x_2$的边际替代率对于不同消费者都相等，且等于生产者用劳动去生产$x_2$的边际转换率即边际产出率时，我们能达到整体最优经济效果。与前面的分析类似，只要使所有消费者和生产者面临的工资率$p_1$与$x_2$的价格$r_2$之

比率相等，则整体最优经济效果等价于局部最优经济效果。

用式（4.1.16）除以式（4.1.13），且用式（4.1.20）除以式（4.1.17），我们有

$$\frac{U_4^1}{U_1^1}=\left(-\frac{dx_1}{dx_4}\right)^1=\frac{F_4}{F_1}=\left(-\frac{dx_1}{dx_4}\right)_F$$
$$=\frac{U_4^2}{U_1^2}=\left(-\frac{dx_1}{dx_4}\right) \tag{4.1.35}$$

用式（4.1.16）除以式（4.1.14），再用式（4.1.20）除以式（4.1.18），我们得到

$$\frac{U_4^1}{U_2^1}=\left(-\frac{dx_2}{dx_4}\right)^1=\frac{F_4}{F_2}=\left(-\frac{dx_2}{dx_4}\right)_F$$
$$=\frac{U_4^2}{U_2^2}=\left(-\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 \tag{4.1.36}$$

式（4.1.35）和式(4.1.36)与式(4.1.31)和式(4.1.34)的经济意义相同，只不过将劳动 $x_3$ 换成了资金 $x_4$，也就是说资金与产品对不同消费者的边际替代率相等且等于用资金生产产品的边际转换率即边际产出率时能达到整体最优经济效果。式（4.1.35）是对第一种产品而言，式（4.1.36）是对第二种产品而言。与前文中的分析类似，我们可以证明若令所有消费者和生产者所面临的同类资源和产品价格之比率都相等，则局部最优经济效果的条件等价于整体最优经济效果的条件。

以上分析通过价格制度和效率的竞争，将局部最优经济效果与整体最优经济效果联结起来了。所以通过价格制度和有效率竞争的市场，我们可以用一种分权决策的系统来达到Pareto最优境界。必须引入市场价格机制，通过个别人不能操纵的价格，局部最优化才能与整体最优效果协调，可见价格是指示整体最优化的一种极重要的信息传输和处理工具。

上文中我们处处强调所有人面临的价格比相等，这种均等需要不断比较各种产品，各种投入对不同人的边际替代率和边际转换率及比价，如果前述等式不成立，则说明未达到综合最优经济效果，则要通过市场贸易和流通来改变资源和产品的分配，即改变人、财、物的时空组合。依靠发达的流通才能达到所有边际替代率，边际转换率相等且等于对所有人相同的比价。可见流通、贸易、市场也是传输经济效果信息，求解综合最优经济效果问题的工具。

有效率竞争下的价格机制，象一台特大容量电子计算机，综合最优经济效果问题可以通过它来求解，整体最优经济效果和局部最优经济效果也可以通过它来协调。经济系统是人类目前所知道的信息容量最大的系统之一，从理论上说，如果能把所有人的效用函数，所有人的生产函数和资源约束全部输入计算机，那么我们不需要价格制度，也可以用数学方法求解综合最优经济效果问题。但是亿万人的效用函数，众多生产者的生产函数，其信息容量之巨大，全世界目前拥有的计算机全部联成网络也无法储存其亿万分之一，更不用说收集这些信息和求解了。所以目前对于综合最优经济效果问题，我们还找不到比市场和价格制度更好的求解方法，尽管可以在生产的局部领域用非价格的方法求解生产者的局部最优经济效果问题，但对消费者的最优经济效果问题，基本上还没有非价格解法。

我们在上文的分析中假定生产技术条件给定即生产函数给定，而着重讨论经济要素的最优组合、资源的最优分配。也就是说提高经济效果的主要潜力是在现有技术、人力、物力等要素的最优组合方面，片面强调先进技术的重要意义是不对的。经济学研究的重点是技术、人力、资源的最优组合，

而不是技术本身。体制改革从根本来说就是要消除妨碍要素进行最优组合的阻力。

要使资金的使用效果达到最优，就必须让资金在部门之间能灵活地流动，以达到资金在不同部门的边际收益率相等，并要使资金的利息率能迅速变化，以使它等于资金的影子价格即资金的边际收益率。这都要改革阻碍资金灵活流动和利息率灵活变化的不合理体制。要使各种生产投入在所有部门之间的分配比率达到最优，要使各种产品的生产比例达到最优，要使消费品在不同地区、个人之间的分配达到最优，这就要使产品的边际替代率等于其边际转换率，并且要使资源对消费者的边际替代率等于它作为投入对于生产者的边际替代率，而且等于相应的比价。要达到最优化的条件，都要求产品和资源的流动。这就要打破某些部门之间、地区之间不合理的行政壁垒，而且为了使工资率与价格的比率能灵活变化以等于边际替代率、边际转换率，也要改革不合理的工资和价格体制。综合最优经济效果的条件还要求所有人面临的比价完全一样，即没有走后门、特权造成的价格歧视，而且所有人都不能控制价格，而只能将其作为常数来接受。

回顾式（4.1.13）至式（4.1.20），两种商品、两种资源、两个人的综合最优经济效果问题可写出 8 个最优经济效果的必要条件，每两个条件又可导出式（4.1.21)至式(4.1.36）那样多派生的条件。对于 $2\times2\times2$ 问题来说，由于派生条件是 8 个最优化必要条件两两比较产生的，所以共有

$$C_8^2=\frac{8!}{2!(8-2)!}=\frac{8\times7}{2}=28$$

个。如果有 3 个人，3 种资源，3 种产品，则共有 $3\times6=18$个变量，从拉氏函数可导出18个最优化必要条件，而派生条件

则有

$$C_{18}^{2}=\frac{18!}{2!(18-2)!}=\frac{18\times 17}{2}=153$$

个。这些派生条件说明所有产品、资源要在所有人之间两两比较经济效果，反复充分比较才能找出全社会的综合最优经济效果。

我们把独立的经济人称为经纪人，他可能是独立的个人也可能是独立的企业。设经纪人共有 $n$ 个，产品和资源共有 $m$ 种，则从综合最优经济效果必要条件导出的派生条件共有

$$C_{mn}^{2}=\frac{(mn)!}{2!(mn-2)!}=\frac{1}{2}mn(mn-1) \quad (4.1.37)$$

若产品、资源数或人数增加 $\alpha$ 倍，则所有派生最优化条件数为

$$C_{\alpha mn}^{2}=\frac{(\alpha mn)!}{2!(\alpha mn-2)!}=\frac{1}{2}\alpha mn(\alpha mn-1) \quad (4.1.38)$$

用式（4.1.38）除以式（4.1.37），我们可以得到要素增加 $\alpha$ 倍后，最优化条件数增加的倍数，设这个倍数为 $\beta$，则

$$\beta=\frac{\frac{1}{2}\alpha mn(\alpha mn-1)}{\frac{1}{2}mn(mn-1)}=\alpha^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{mn-1} \quad (4.1.39)$$

将 $\beta$ 对 $\alpha$ 求导数：

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=2\alpha+\frac{2\alpha-1}{mn-1}>0$$

$$\frac{d^{2}\beta}{d\alpha^{2}}=2+\frac{2}{mn-1}>0 \quad (4.1.40)$$

上式说明 $\beta$ 比 $\alpha$ 增长得快，因为 $\beta$ 对 $\alpha$ 的加速率大于 0。

可见随着经济的发达，卷入市场的产品、资源、人员越来越多，则在这些因素之间进行最优组合的最优化条件将加

速增多，也就是说进行择优的计算量加速增加，选择越来越困难，这种困难也是加速增加的。为了减少这种困难，必须使经济体制具有适合经济发达的灵活性，以便将经济因素进行组合、比较，流通的人为阻力减少到最低限度。

市场的本质就是进行要素的最优组合。发达的市场可以提高经济信息的传输效率，提高求解综合最优经济效果问题的效率。要进行所有要素的边际替代率(或边际转换率)的两两比较，就要将相关要素或其信息进行流通，流通效率的提高，或流通阻力的降低，自然可以提高进行要素最优组合的效率。因此有些现代经济学说认为交易成本的降低，交易效率的提高是经济增长的最重要原因，其重要性远胜过技术进步对经济增长的作用。

1963年Debreu，Scarf用点集拓扑严格证明了 Pareto最优境界与竞争均衡的等价性，这就是著名的 Debreu-Scarf定理。这一定理说明在有效率竞争的条件下，局部最优经济效果与整体最优经济效果协调。根据上两章的分析，消费者的局部最优经济效果可以用有效率竞争下消费者对消费品的需求函数和对初始资源（劳动、资金）的供给函数描述；而生产者的局部最优经济效果可以用有效率竞争条件下生产者对产出的供给函数和对投入的需求函数来描述。瓦尔拉斯提出，若有 $n$ 种商品的需求函数，$n$ 种商品的供给函数，则令需求等于供给，可以得到 $n$ 个过量需求方程，其中只含 $n$ 个价格。由于存在总支出等于总收入的预算约束，所以这 $n$ 个过量需求方程只有 $n-1$ 个是互相独立的，所以我们可以利用这 $n-1$ 个方程解出均衡的相对价格。由于需求函数和供给函数的 0 阶齐次性，所以求出 $n-1$ 个相对价格后就可以求出 $n$ 种商品的均衡供求量。这就是著名的瓦尔拉斯一般均

衡理论和瓦尔拉斯定理。对于线性过量需求方程，证明解的存在是轻而易举的。但实际上过量需求方程都是非线性的，对于非线性联立方程组，并不见得有 $n-1$ 个互相独立的方程就可解出 $n-1$ 个变量。瓦尔拉斯并没有严格证明一般均衡解的存在，他只是提出了命题，而来证明它。直到冯·诺依曼，才用不动点定理证明了一般均衡解的存在。

由于需求函数和供给函数是实证的，所以一般均衡理论把Pareto最优境界实证化了。下一节我们就讨论综合最优经济效果的这种实证分析。

## §4.2 简单的可计算一般均衡（CGE）模型

一般均衡理论自从瓦尔拉斯提出来以来一直是理论上的东西，谁也没做过定量的一般均衡模型。但是六十年代末以来，可计算一般均衡（CGE）模型的出现，使一般均衡理论进入实际应用的新时代。

最简单的CGE模型假定生产函数是投入产出型的，从生产者利润最大化条件，用线性规划求出数字式供给函数，然后利用线性支出系统，做出需求函数，联立供给函数和需求函数，求解达到综合最优经济效果的最优产量和最优价格。

回顾第三章§3.8的式（3.8.40）给出的线性规划问题

$$\max:\quad \pi = \boldsymbol{N}'\boldsymbol{X}$$

服从约束

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} \leqslant \overline{\boldsymbol{B}} \tag{4.2.1}$$

其中$\boldsymbol{X}$为总产出向量，$\boldsymbol{N}$为单位产出的利润向量，$\pi$为生产者的总利润，$\boldsymbol{B}$为单位产出占用资源的系数矩阵，$\overline{\boldsymbol{B}}$为资源拥有量向量。上述线性规划问题反映了生产者在资源和技术条件约束下追求利润最大化的最优经济效果问题。

若全社会只有三个部门，两种资源，则上式可展开为

$$\max: \quad \pi = (n_1 n_2 n_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right\}' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1-(p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31}) \\ p_2-(p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32}) \\ p_3-(p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33}) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= [p_1-(p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31})]x_1 + [p_2-(p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32})]x_2 + [p_3-(p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33})]x_3 \tag{4.2.2}$$

服从约束

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$$

即

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3 \leqslant \bar{b}_1$$

$$b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3 \leqslant \bar{b}_2$$

从§3.8，我们已经知道从上述线性规划问题可导出数字式供给函数，即最优产出向量 $\boldsymbol{X}^*$ 是价格向量 $\boldsymbol{P}$ 的数字式函数：

$$\boldsymbol{X}^* = \Phi(\boldsymbol{P}) \tag{4.2.3}$$

根据投入产出分析，最终产品供给向量 $\boldsymbol{C}^s$ 是最优总产量向量 $\boldsymbol{X}^*$的函数，即

$$\boldsymbol{C}^s = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^* \tag{4.2.4}$$

对于三个部门情形上式可展为

$$\begin{pmatrix} C_1^s \\ C_2^s \\ C_3^s \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} \tag{4.2.5}$$

由于$\boldsymbol{X}^*$是价格的函数，$A$为给定的投入产出常系数矩阵，所以$\boldsymbol{C}^s$亦是价格的函数。即式（3.8.45）所示的最终产品数字式供给函数

$$\boldsymbol{C}^s = F(\boldsymbol{P}) \tag{4.2.6}$$

然后我们用最简单的线性支出系统（$LES$）作为最终产品的需求函数描述消费者的最优经济效果问题。

回顾第二章§2.3，从 Cobb-Douglas 型效用函数能导出式（2.3.7）那样的线性支出系统。设$C_i$为$i$种最终商品需求量，则在三个部门情形下，我们有线性支出系统

$$\begin{aligned} p_1c_1 &= \alpha_1(p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3) + \beta_1 \\ p_2c_2 &= \alpha_2(p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3) + \beta_2 \\ p_3c_3 &= \alpha_3(p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3) + \beta_3 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

由于购买商品的总支出等于总的消费掉的收入，所以要求参数满足$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$，$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$。因此从上式解出的需求系统

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha_1)p_1 & -\alpha_1 p_2 & -\alpha_1 p_3 \\ -\alpha_2 p_1 & (1-\alpha_2)p_2 & -\alpha_2 p_3 \\ -\alpha_3 p_1 & -\alpha_3 p_2 & (1-\alpha_3)p_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

中的系数矩阵为降秩矩阵，即有一个需求函数可用其它需求函数表出。式(4.2.7)中只有两个方程是互相独立的。这就是需求函数的加总性。令第一种商品为标准商品，其价格$p_1=1$，而$p_2$，$p_3$分别为另外两种商品的实际价格与第一种商品实际价格的比率，即相对价格。去掉多余的一个方程，则

式（4.2.8）可改写为

$$\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_2)p_2 & -\alpha_2 p_3 \\ -\alpha_3 p_2 & (1-\alpha_3)p_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\alpha_2)p_2 & -\alpha_2 p_3 \\ -\alpha_3 p_2 & (1-\alpha_3)p_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} c_1 \quad (4.2.9)$$

此式为最终产品的数字式需求函数，只要令相对价格 $p_2$，$p_3$ 取一定值，并外生给定 $c_1$ 的值，则可算出 $c_2$，$c_3$。我们可将上式写成矩阵向量形式

$$\boldsymbol{C}^D = G(\boldsymbol{P}) \quad (4.2.10)$$

我们用式（4.2.10）减去式（4.2.6）则得到过量需求函数，令过量需求向量为 $\boldsymbol{E}=(e_1, e_2, e_3)'$，则过量需求函数为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}^D-\boldsymbol{C}^S=\Psi(\boldsymbol{P}) \quad (4.2.11)$$

因为 $\boldsymbol{C}^D$ 是价格 $P$ 的函数，$\boldsymbol{C}^S$ 亦是价格 $\boldsymbol{P}$ 的函数，所以 $\boldsymbol{E}$ 亦是价格 $\boldsymbol{P}$ 的数字式函数。

由于预算约束的存在，尽管产出量 $x_i^S$ 与需求量 $x_i^D$ 可能不相等，但是所有商品的售卖总额必须与购买总额相等，即

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^D \equiv \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^S \quad (4.2.12)$$

其中 $\boldsymbol{X}^D=(x_1^D, x_2^D, x_3^D)'$，$\boldsymbol{X}^S=(x_1^S, x_2^S, x_3^S)'$，$x_i^D$ 不一定等于 $x_i^S$（$i=1, 2, 3$）

根据投入产出分析

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}^D &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}^D \\ \boldsymbol{X}^S &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}^S \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

代入式（4.2.12），则

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}^D \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}^S \quad (4.2.14)$$

其中尽管 $c_i^D$ 不一定等于 $c_i^S$( $i=1,2,3$), 但是由于预算约束，上列恒等式成立。所以若给定 $c_1^D$, $c_2^D$, $c_1^S$, $c_2^S$, 代入上式，则可将 $c_3^D$ 与 $c_3^S$ 的关系求出。也就是说若给定两个过量需求函数，则第三个过量需求函数可以利用预算约束从前两个过量需求函数导出。即式(4.2.11)的过量需求函数只有两个是互相独立的，另一个可以从这两个推出。推而广之，若有 $n$ 种产品，则 $n$ 个过量需求函数中只有（$n-1$）个是互相独立的，另一个可从这（$n-1$）个方程导出。这就是著名的**瓦尔拉斯定理**。

令式（4.2.11）等于 0，即令供求相等，过量需求等于 0，则我们得到过量需求方程

$$\boldsymbol{E}=\Psi(\boldsymbol{P})=0 \qquad (4.2.15)$$

由于瓦尔拉斯定理的原因，其中有一个过量需求方程可由另外的方程推出，即有一个方程是多余的。我们可以任意去掉一个方程，例如去掉第一个方程，于是我们只有两个过量需求方程，但却有三个未知变量 $p_1$, $p_2$, $p_3$。但是我们令 $p_1=1$, $p_2$, $p_3$ 为相对价格，则利用互相独立的两个过量需求方程可解出唯一的相对价格。根据需求函数和供给函数的 0 阶齐次性，所有商品的价格及工资率(即劳动的价格)以相同的比例变动，需求量和供给量不变。因此只要解出相对价格，我们就可以代回需求函数或供给函数求出唯一的均衡供求量。

由于过量需求函数是价格 $P$ 的数字式函数，则过量需求方程式（4.2.15）也是数字式方程，无法用解析方法求解。一般是用数值解法，如非线性规划的数值解法。牛顿数值解法，最陡梯度法等等。但是最有效和最简便的解法就是试错调价法。

我们可以首先令相对价格等于目前的相对价格，将相对

价格代入线性规划问题式（4.2.1），则可解出最优总产量 $X^*$。利用式（4.2.4），即用最优总产量 $\boldsymbol{X}^*$ 减去中间消耗量 $\boldsymbol{AX}^*$，则可算出最终产品供给量 $\boldsymbol{C}^S=\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{AX}^*=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X^*$。然后将相对价格代入需求函数式（4.2.10），则可解出最终产品需求量 $\boldsymbol{C}^D$。将 $\boldsymbol{C}^D$ 与 $\boldsymbol{C}^S$ 比较，若其中 $c_i^D>c_i^S$，即过量需求 $c_i^D-c_i^S>0$，意味着供不应求，则我们提高 $i$ 商品的相对价格 $p_i$。若 $c_j^D<c_j^S$，即过量需求 $c_j^D-c_j^S<0$，意味着供过于求，则降低 $j$ 商品的相对价格 $p_j$。这样调价后得到一组新的相对价格 $\boldsymbol{P}$。然后以新的相对价格代回线性规划问题式(4.2.1)，解出新的总产量 $\boldsymbol{X}^*$，又利用式（4.2.4）算出新的最终产品供给量 $C^S$。将新的相对价格代入需求函数式(4.2.10)，算出新的最终产品需求量 $C^D$。将 $\boldsymbol{C}^D$ 和 $\boldsymbol{C}^S$ 比较，若不等则继续调价。如此反复迭代，直至 $\boldsymbol{C}^D=\boldsymbol{C}^S$ 为止，则可解出均衡的相对价格和均衡的供求量：

$$\boldsymbol{P}^*=(p_1^*,\ p_2^*,\ p_3^*),\quad \boldsymbol{C}^*=\begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \end{pmatrix} \qquad (4.2.16)$$

$P^*$ 就是使生产从追求利润最优化的本位利益出发自动满足消费者效用最大化要求的最优价格。它能协调局部最优经济效果和整体最优经济效果，刺激人们从本位利益出发而追求综合最优经济效果。

将 $\boldsymbol{C}^*$ 代入式（4.2.15），则可算出达到综合最优经济效果的生产计划

$$\boldsymbol{X}^*=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{C}^* \qquad (4.2.17)$$

将最优产出价格 $P^*$ 代入线性规划问题式（4.2.1）可求出其对偶规划

$$\Lambda^*=\begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \\ \lambda_2^*\end{pmatrix} \tag{4.2.18}$$

这就是唯一的资源影子价格。在不考虑消费者最优经济效果只考虑生产者利润最大化时，资源的影子价格不具备唯一性，它是产出价格的函数。若产出价格$P$是均衡的最优价格$P^*$，则资源的影子价格$\Lambda^*$亦是资源的最优价格，它反映了资源微小增量对整体最优经济效果的贡献。由于资源主要是资金、劳动，$\lambda_2^*$为最优工资率，$\lambda_1^*$为最优利息率，所以$\Lambda^*$决定了最优收入分配。采用试错算法简便有效，一般迭代五次就能近似求出均衡解，缺点是没有标准程序。

CGE 模型对于社会主义计划经济有重大意义。它可以解决产量计划指标与利润产值计划打架的问题。因为按模型解出的最优价格定价则生产者利润最大化的产量自动满足消费需求，不会出现需要的产品利润小，不需要的产品利润大这类现象。做模型的过程中，只有消费者的需求函数必须从市场收集信息，而生产函数（投入产出表），资源约束等都可以通过计划机关来收集信息。这种模型是从生产函数推出数字式供给函数，而不是直接做市场的供给函数，所以可以去掉完全竞争的假定。对于计划经济国家来说，做供给函数模型是困难的。而且由于生产的集中计划，供给不直接由价格决定，所以直接做供给函数模型并没有实际意义。但是上述从投入产出生产函数和线性规划导出供给函数的方法不但在社会主义国家是可行的而且适合计划经济的特点。

CGE 模型的消费需求模型是从市场信息得来的，而生产这一块可以依靠经济计划机关做模型。所以这种模型反映了计划经济与市场相结合的特点。由于各人的效用函数只有自己清楚，所以对于社会主义计划经济，消费者的生活计划只

能分散地由消费者决策，而不能由计划机关集中决策，即消费品需求只能由市场决定，我们也只能通过市场的需求函数来分析消费者的最优经济效果问题。

我们在求解过量需求方程的迭代过程中就是利用价格在消费者和生产者之间互相反馈传输经济信息。生产者不可能知道消费者的效用函数，消费者也不可能知道生产者的生产函数，他们只可能追求本身的局部最优经济效果，生产者追求最大利润，消费者追求最大效用，而互相的协调必须通过价格制度来传输信息。当生产者根据给定价格算出的最优供给量不等于消费者的最优需求量时，则我们在求解过程中试错调价，这就相当于把消费者的局部经济效果信息传输给生产者，而把生产者的局部经济效果信息传输给消费者，如此多次反馈，才能使二者的局部经济效果协调，达到综合最优经济效果。求解正是在计算机上模拟计划和市场调节过程。

实践证明，CGE 模型的适用性很广，既可以用于完全的自由市场经济，也可用于集中计划经济。但它特别适合于国家干预较多的混合经济体制和经过体制改革的计划经济国家。

在这节最简单CGE 模型中，由于需求函数中不包含消费者的收入因素，所以资源的影子价格转化为收入，收入再转化为对最终产品的需求，需求再通过价格反馈影响产品的供给，然后又通过生产者利润最大化的线性规划问题影响其对偶解——资源的影子价格，这个闭环回路没有完成，

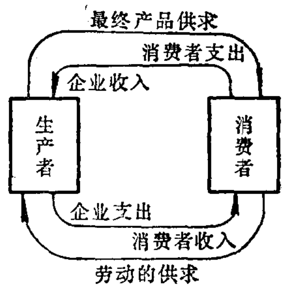



图 4.4

参见图4.4。本节只研究了最终产品的供给和需求，即图中上半部的局部循环回路，而没有研究初始资源的供给和需求，即图中下半部的循环回路。从这种意义上说，整个模型还未完全封闭。图中未绘出中间产品的供给和需求，它们是通过投入产出系统来达到循环的均衡的。下一节我们将讨论包含初始资源供求的封闭的非线性 CGE 模型。

## §4.3 二阶段CGE模型

我们知道生产者不但是产品的供给者，而且是初始资源(如劳动)的需求者，而消费者不但是最终产品的需求者，而且是初始资源的供给者，但上节的模型中生产者对初始资源的需求和消费者对初始资源的供给没有联结起来，所以模型还没完全封闭。本节我们对生产者的最优经济效果分两阶段分析。第一阶段我们用 Cobb-Douglas 型或 CES 型生产函数描述生产者利用初始资源生产中间产品和最终产品的规律。这两种生产函数与投入产出生产函数不同，它们反映了初始资源互相之间有很强替代性之特点。以此为基础，将生产者对初始资源的需求与消费者对初始资源的供给及由此而得到的收入联系起来。第二阶段，我们假定中间产品和最终产品之间的投入产出关系可以用投入产出生产函数描述，即假定中间投入之间没有替代弹性。

设 $i$ 部门的生产函数为

$$x_i = f_i(K_i, L_i), \quad i = 1, \cdots, n \qquad (4.3.1)$$

其中 $x_i$ 为 $i$ 部门的总产出量，$K_i$ 为 $i$ 部门的固定资产量，$L_i$ 为 $i$ 部门的职工人数。上式可能是 Cobb-Douglas 型的：

$$x_i = A_i K_i^{\alpha_i} L_i^{\beta_i}, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (4.3.2)$$

其中 $A_i$ 为 $i$ 部门的效率参数，我们亦可以将技术进步因子

$e^{bt}$ 放入 $A_i$、$\alpha_i$ 为 $i$ 部门资本弹性，$\beta_i$ 为 $i$ 部门劳力弹性。生产函数也可以是 CES 型的：

$$x_i=r_i(\delta_{1i}K_i^{-\rho_i}+\delta_{2i}L_i^{-\rho_i})^{-\frac{u_i}{\rho_i}},\quad i=1,\cdots,n \quad (4.3.3)$$

其中 $r_i$ 为 $i$ 部门的效率参数，$\delta_{1i}$ 为资本密集系数，$\delta_{2i}$ 为劳力密集系数，$\delta_{1i}+\delta_{2i}=1$。$\rho_i$ 为替代系数，$u_i$ 为阶次参数。$u_i>1$ 则生产函数是规模报酬递增的，$u_i<1$ 则生产函数是规模报酬递减的，$u_i=1$ 则生产函数是规模报酬不变的。

职工人数 $L_i$ 还可以进一步细致划分为非技术劳动者、工程技术人员和知识分子等。设 $i$ 部门的非技术劳动者人数为 $L_{i1}$，技术人员、知识分子为 $L_{i2}$，则 $i$ 部门的职工人数$L_i$ 可写成分解函数

$$L_i=L_i(L_{i1},L_{i2}) \quad (4.3.4)$$

分解函数可以是 Cobb-Douglas 型或 CES 型的。若为 Cobb-Douglas 型的，则上式变成

$$L_i=k_{0i}L_{i1}^{k_{1i}}L_{i2}^{k_{2i}},\quad i=1,\cdots,n, \quad (4.6.5)$$

若分解函数是 CES 型的，则 $L_i$ 可写为

$$L_i=k_i(\delta_{1i}L_{i1}^{-\gamma}+\delta_{2i}L_{i2}^{-\gamma})^{-1/\gamma},\quad i=1,\cdots,n, \quad (4.3.6)$$

其中 $\delta_{1i}+\delta_{2i}=1$。

这一部分分析将总产出 $x_i$ 与劳动 $L_i$ 挂上了勾，即将产出与初始资源挂上了勾。产出去掉中间消耗后就是最终产品的供给，而劳动的收入决定最终产品的需求，最终产品的需求与供给可以用上节的方法联结起来。上节 $x_i$ 与 $L_i$ 没挂上勾，所以本节通过生产函数中 $x_i$ 与 $L_i$ 的关系将整个模型封闭起来了。

下面我们进一步讨论劳动的供求如何均衡，均衡工资如

何确定，以及收入如何确定。

劳动的收入即工资，它就是劳动的价格。这种价格由劳动的供求确定。劳动的供给从人口数字可以外生地求得，而对劳动的合理需求是生产者根据现有技术、资源和价格等条件，从利润最大化原则出发，做出最优产出计划，也同时确定对劳动的最优（局部最优）需求量。因此我们首先要写出生产者的利润函数，然后探讨利润最大化的条件。利用这一条件，可求出对劳动的最优需求量及最优产量。这里与上节不同的是，上节只将最优产量写成产出价格的函数，而未考虑生产者亦是初始资源（主要是劳动）的需求方，最优产量不但与产出的价格（包括中间产品的价格）有关，亦与初始资源的价格和供求有关。

设中间产品的生产函数仍可用投入产出系统描述，则对于三个部门情形，$i$ 部门的总产出为

$$x_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+c_i,\quad i=1,2,3 \tag{4.3.7}$$

类似上节，单位 $i$ 部门产品之成本为

$$p_1a_{1i}+p_2a_{2i}+p_3a_{3i},\quad i=1,2,3 \tag{4.3.8}$$

设单位 $i$ 部门产品的价格 $p_i$ 与中间投入成本之差为单位产品利润系数 $n_i$，则

$$n_i=p_i-(p_1a_{1i}+p_2a_{2i}+p_3a_{3i}),\quad i=1,2,3 \tag{4.3.9}$$

设两种劳动的工资率分别为$w_1$，$w_2$，$i$ 部门使用两种劳动的数量分别为 $L_{i1}$，$L_{i2}$，则 $i$ 部门工资成本为

$$w_1L_{i1}+w_2L_{i2} \tag{4.3.10}$$

于是 $i$ 部门的总利润为

$$\pi_i = n_i x_i - (w_1 L_{i1} + w_2 L_{i2})$$
$$= p_i - (p_1 a_{1i} + p_2 a_{2i} + p_3 a_{3i}) - (w_1 L_{i1} + w_2 L_{i2})$$
$$i = 1, 2, 3 \qquad (4.3.11)$$

与上节的利润函数不同，其中不但包含中间投入的成本，还包含劳动工资成本。

$i$ 部门利润最大化的条件为

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial L_{i1}} = n_i \frac{\partial x_i}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial L_{i1}} - w_1 = 0 \quad i = 1, 2, 3$$
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial L_{i2}} = n_i \frac{\partial x_i}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial L_{i2}} - w_2 = 0 \qquad (4.3.12)$$

上式可改写为

$$n_i \frac{\partial x_i}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial L_{i1}} = w_1$$
$$i = 1, 2, 3 \qquad (4.3.12')$$
$$n_i \frac{\partial x_i}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial L_{i2}} = w_2$$

这就是我们上一章导出的生产者最优经济效果的必要条件：投入价格等于投入的边际收益。

对于三个部门模型，式（4.3.12′）共有 $3 \times 2 = 6$ 个方程，如果现有的固定资产 $K_i$（$i = 1, 2, 3$）为已知给定数，则未知变量有 6 个：$L_{11}$，$L_{12}$，$L_{21}$，$L_{22}$，$L_{31}$，$L_{32}$。只要给定工资率 $w_1$，$w_2$，则式（4.3.12）有 6 个方程 6 个未知数，我们可以利用它解出 $i$ 部门对两类劳动的最优需求量 $L^D_{i1}$ 和 $L^D_{i2}$（$i = 1, 2, 3$）。如果 $w_1, w_2$ 变动，则各部门对两种劳动的最优需求量可以写成工资率 $w_1$ 和 $w_2$ 的函数，这就是生产者对劳动的需求函数。我们在生产者最优经济效果问题中就曾经从生产者利润最大化条件导出生产者对投入的需求函数，这里导出的对劳动的需求函数只是一个特例，将 $L^D_{i1}$ 对

$i$ 求和，就得到所有生产者对非技术劳动的需求函数，将 $L_{i2}^D$ 对 $i$ 求和就得到所有生产者对技术劳动的需求函数。设社会对非技术劳动的总需求为 $L_1^D$，对技术劳动的总需求为 $L_2^D$，则

$$\begin{aligned} L_1^D &= L_{11}^D + L_{21}^D + L_{31}^D \\ L_2^D &= L_{12}^D + L_{22}^D + L_{32}^D \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

由于 $L_{i1}^D$ 和 $L_{i2}^D$ 都是工资率 $w_1$，$w_2$ 的函数，所以 $L_1^D$ 和 $L_2^D$ 亦是工资率 $w_1$，$w_2$ 的函数，即

$$\begin{aligned} L_1^D &= L_1^D(w_1, w_2) \\ L_2^D &= L_2^D(w_1, w_2) \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

设现有非技术劳动总量为 $L_1^S$，技术劳动总量为 $L_2^S$，则我们用 $L_1^D$ 减去 $L_1^S$，用 $L_2^D$ 减去 $L_2^S$，则得到全社会对两类劳动的过量需求函数：

$$\begin{aligned} E_1 &= L_1^D - L_1^S = L_1^D(w_1, w_2) - L_1^S \\ E_2 &= L_2^D - L_2^S = L_2^D(w_1, w_2) - L_2^S \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

它们是工资率 $w_1$，$w_2$ 的函数。令对劳动的过量需求 $E_1=0$，$E_2=0$，则得到劳动的过量需求方程

$$\begin{aligned} L_1^D(w_1, w_2) - L_1^S &= 0 \\ L_2^D(w_1, w_2) - L_2^S &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

其中 $L_1^S$，$L_2^S$ 为给定常数，两个方程中只有两个未知变量，所以我们可以利用式（4.3.16）的联立方程求解出均衡工资率 $\bar{w}_1, \bar{w}_2$。

实际求解往往用试错解法。我们可以令 $w_1$，$w_2$ 等于现行工资率，和现行产品价格一块代入生产者利润函数式（4.3.11），再利用利润最大化的条件式（4.3.12′）解出6个变量 $L_{11}^D$，$L_{12}^D$，$L_{21}^D$，$L_{22}^D$，$L_{31}^D$，$L_{32}^D$。利用式（4.3.13）

算出 $L_1^D$ 和 $L_2^D$，如果 $L_1^D<L_1^S$，即对非技术劳动的需求小于现有非技术劳动人数，则降低非技术劳动的工资率 $w_1$，如果 $L_2^D>L_2^S$，即对技术劳动的需求大于现有技术劳动人数，则提高技术劳动的工资率 $w_2$，如此调工资后得到一组新的工资率，然后与现行物价一块再代回利润函数式（4.3.11)，重新求解对劳动的需求量 $L_1^D$，$L_2^D$。若它们与给定的 $L_1^S$，$L_2^S$ 相等，则这种工资率就是以现行物价为基础的均衡工资率；如果不等，则继续调工资，重复上述迭代程序，直至求出的 $L_1^D$，$L_2^D$ 等于 $L_1^S$，$L_2^S$ 为止，这时第一阶段的求解过程完毕。

这一阶段不但求出了以现行物价为基础的均衡工资率 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$，而且求出了 $i$ 部门对两种劳动的最优需求量 $L_{i1}^D$，$L_{i2}^D$，（$i=1,2,3$），将 $L_{i1}^D$，$L_{i2}^D$ 代入式（4.3.4)，则可解出 $i$ 部门使用的综合劳动量 $L_i$（$i=1,2,3$）。然后将 $L_i$ 代回生产函数式（4.3.1)，再将现有的固定资产数量 $K_i$ 代入生产函数式（4.3.1)，则可解出 $i$ 部门在现行物价条件下的最优产出量 $\bar{x}_i$。

第一阶段的所谓最优全部是生产者经济效果的局部最优，即利润最大化，而没有考虑消费者的经济效果问题。所以“最优产量”是否能卖出去，能否满足人民的需求，这个问题并没有解决。要解决这个问题，则要计算最终产品供求均衡的产品最优价格。但我们在第一阶段是以现行价格为基础来计算生产者的最优产量及劳动的供求均衡的。所以我们有必要进一步在第二阶段求解中将产品需求与第一阶段算出的产品供给进行比较，以求解产品的最优价格。

第二阶段的计算分两头进行。

首先我们利用第一阶段算出的最优产量 $\bar{x}_i$（$i=1,2,3$）减去中间消耗，则得到最终产品的供给量 $c_i^S$（$i=1$，

2，3）。根据投入产出分析，$i$ 部门最终产品供给量 $c_i^S$ 等于总产出量 $\bar{x}_i$ 与中间消耗之差，

即

$$c_i^S=\bar{x}_i-(a_{i1}\bar{x}_1+a_{i2}\bar{x}_2+a_{i3}\bar{x}_3) \qquad (4.3.17)$$
$$i=1,2,3$$

$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$ 已在第一阶段算出，所以利用上式可解出 $c_i^S$。

第二阶段计算的另一头就是利用第一阶段算出的工资率 $\bar{w}_1$，$\bar{w}_2$ 来计算消费者的收入，然后和给定的现行物价一块代入需求函数，以确定最终产品的需求量 $c_i^D$（$i=1,2,3$）。与上节不同的是，我们将引入较复杂的线性支出系统（LES）或第二章§2.4介绍的 AIDS 作为需求模型，这些模型都将价格和收入作为自变量，而上节的简单 LES 中只有价格没有收入。

将第二章§2.3中式（2.3.21）的 $x_i$ 改写成 $c_i^D$，$\bar{x}_i$ 改写成 $\bar{c}_i$，则三种商品的线性支出系统可写为

$$p_ic_i=p_i\bar{c}_i+\beta_i[M-(p_1\bar{c}_1+p_2\bar{c}_2+p_3\bar{c}_3)],$$
$$i=1,2,3 \qquad (4.3.18)$$

其中 $\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$，$\bar{c}_3$，$\beta_i$（$i=1,2,3$）为参数，参数的算法由§2.3给出，即

$$\bar{c}_i=\frac{M}{p_i}\left(\alpha_i+\frac{\beta_i}{\phi}\right) \qquad (4.3.19)$$

其中$M$为用于购买消费品的收入额，$\alpha_i=\dfrac{p_ic_i}{M}$ 为 $i$ 种商品消费金额占总支出的平均份额，$\beta_i=\dfrac{\partial p_ic_i}{\partial M}$为 $i$ 种商品消费额占总支出的边际份额。这两个参数都可以从恩格尔函数算得。而 $\phi$ 为 *Frisch* 参数

$$\phi=\frac{-M}{M-S} \qquad (4.3.20)$$

其中$S=p_1\bar{c}_1+p_2\bar{c}_2+p_2\bar{c}_3$为起码生活水平总支出额。例如民政部门发放社会救济标准为每人每月15元，则这就可视为起码生活水平的总支出额。

式(4.3.18) 可改写为显需求函数

$$c_i^D=\bar{c}_i+\frac{\beta_i}{p_i}[M-(p_1\bar{c}_1+p_2\bar{c}_2+p_3\bar{c}_3)] \quad (4.3.21)$$

其中$M$可从第一阶段算出的均衡工资率$\bar{w}_1$，$\bar{w}_2$算出。即$M$为总的工资收入额：

$$M=\bar{w}_1L_1+\bar{w}_2L_2 \quad (4.3.22)$$

其中$L_1$，$L_2$为第一阶段求出的两种劳动的供求均衡量。将$M$和现行物价$p_1$，$p_2$，$p_3$代入式（4.3.21)，则可算出最终产品需求量$c_i^D$( $i=1,2,3$ )。

我们还可以采用第二章§2.4介绍的AIDS作为需求模型，将式（2.4.19）中的$w_i=\frac{p_ix_i}{M}$改写成$w_i=\frac{p_ic_i^D}{M}$，则AIDS可写为

$$w_i=\frac{p_ic_i^D}{M}=\alpha_i+\gamma_{i1}\log p_1+\gamma_{i2}\log p_2$$

$$+\gamma_{i3}\log p_3+\beta_i\log\frac{M}{a} \quad i=1,2,3 \quad (4.3.23)$$

或写成显需求函数的形式

$$c_i^D=\frac{M}{p_i}\Big(\alpha_i+\gamma_{i1}\log p_1+\gamma_{i2}\log p_2+\gamma_{i3}\log p_3$$

$$+\beta_i\log\frac{M}{a}\Big) \quad i=1,2,3 \quad (4.3.23')$$

其中$a$为价格指数，$\frac{M}{a}$为实际收入，$\alpha_i$，$\gamma_{i1}$，$\gamma_{i2}$，$\gamma_{i3}$，$\beta_i$为参数，可用经济计量学根据统计数据算出。

用 $c_i^D$ 减去 $c_i^S$，则可得到过量需求函数

$$e_i = c_i^D - c_i^S, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.3.24)$$

与上节类似，由于瓦尔拉斯定理的原因，过量需求函数有一个可由其它过量需求函数表出，所以我们只能利用过量需求函数求解相对价格。

令过量需求函数等于0，则得到过量需求方程

$$e_i = c_i^D - c_i^S = 0, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (4.3.25)$$

由于 $c_i^D$ 是收入$M$和价格的函数，而收入$M$又是工资率 $\overline{w}_1, \overline{w}_2$ 的函数；第一阶段解出的 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$ 也是在给定价格 $p_1, p_2, p_3$ 时算出的，即 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$ 也是价格的函数，所以收入$M$亦是价格的函数，因而需求 $c_i^D$ 可以写成只含价格的函数。而 $c_i^S$ 亦是工资率 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$ 和产品价格的函数，其中 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$ 也可写成价格的函数，所以过量需求方程中只含有价格。即使因为瓦尔拉斯定理的原因，有一个方程是多余的，我们仍可从过量需求方程解出相对价格。

不过实际求解一般是用试错法分两阶段进行。我们首先假定相对价格等于现行的相对价格，在前述第一阶段的迭代计算中解出均衡工资率 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$，以及最终产品供给量 $c_i^S$ $(i = 1, 2, 3)$，然后利用工资率计算收入$M$，又将$M$和给定的相对价格代入需求函数 $c_i^D$，比较 $c_i^D$ 与 $c_i^S$，若 $c_i^D > c_i^S$，则供不应求，提高 $i$ 商品的相对价格 $p_i$，若 $c_i^D < c_i^S$，则供过于求，我们降低 $i$ 商品的相对价格 $p_i$。如此调价后，得到一组新的相对价格。我们又将这组新的相对价格代回第一阶段的生产者利润函数，重新进行第一阶段的迭代求解，解出新的均衡工资率 $\overline{w}_1$，$\overline{w}_2$ 以及新的最终产品供给量 $c_i^S$ $(i = 1, 2, 3)$。然后又重复第二阶段的计算，如此反复进行两阶段迭代计算，直至最终产品供求和劳动供求全部相等，则整个

一般均衡问题求解完毕。

二阶段迭代的流程方框图如下图所示：

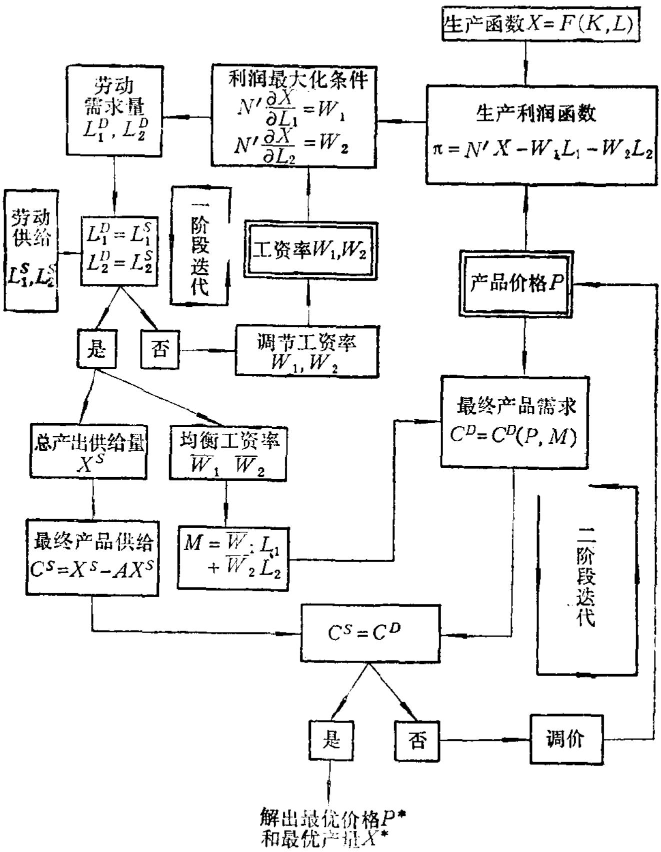



图 4.5

从上图可以看出整个迭代过程中不能没有价格这个求解工具。没有价格生产者不可能了解消费者的经济效果，没有价格消费者也不可能了解生产者的经济效果，没有价格，由

于计划机关不可能收集到所有人的效用函数的信息，所以根本无法求解综合最优经济效果问题。求解的迭代过程主要靠试错调节价格，这就是模拟计划和市场的价格反馈调节过程。一般而言经济系统的过量需求方程组无法用解析法求解，而必须用数值解法，数值解法实质上就是模拟市场的价格反馈调节过程，进行试错调价，这也说明了价格制度的不可或缺，不用价格的反复调节是不可能解出综合最优经济效果问题的。

CGE 模型是否存在均衡解，这由不动点定理给出证明。不过实际做模型的过程中，解是否存在并不成为问题，到 1981 年为止已有 15 个国家做 CGE 模型，都没有不存在解的问题。

CGE 模型中的需求函数可以分为不同收入水平和不同类型消费者分别做，因而能细致地求解国民收入在不同阶层人民之间的最优分配。模型还可以加上其它体制方面的约束条件以及引入投资和外贸等因素，以便计算最优利息率和最优汇率。

## §4.4 局部均衡和一般均衡的稳定性

若市场供求处于不均衡状态，价格和供求量是否会趋于均衡呢？或者市场处于均衡状态时，某种干扰打乱了这种均衡，市场还会回到均衡状态去吗？这就是稳定性问题。**均衡**概念和**稳定性**概念的差别可以用下述例子说明。一根底部很平的木棒可以在平地上竖立不动，保持均衡，但我们将其轻轻一推，它就倒在地上再也不会竖起来，这种均衡就叫做不稳定均衡，一旦外界干扰使其脱离均衡，则均衡不会再恢复。但是一个玩具“不倒翁”也可以放在桌上保持均衡，我

们推倒它后，它几经摇摆又会恢复原来的均衡，这种均衡就是稳定的。

如果我们只考虑一种商品或少数几种商品的供求和其价格调节之间的关系，而假定其它商品的数量和价格不变，这时的均衡问题就是**局部均衡**问题；如果象上节那样，考虑所有商品的数量和价格同时达到供求均衡则叫**一般均衡问题**。

关于供求不均衡时，价格对供求量进行反馈调节有所谓**Walras 假定**和**Marshall 假定**。这些假定是对价格体制的行为规律作出一些定性的假设。

Walras 假定是种价格调节行为特性的假定。如果过量需求不等于 0，则价格变化方向与过量需求的符号相同。即过量需求大于 0（供不应求），则价格上升；过量需求小于 0（供过于求），则价格下降；过量需求等于 0（供求相等），价格不变。如果过量需求不等于 0，当时间不断流逝时，价格调节过程是否能使过量需求趋于 0，这就是 **Walras 稳定性**问题。

Marshall 假定是种对商品供求量调节行为特性的假定，即假定需求价格不等于供给价格，则对商品的供给量和需求量会对供求价格差作出反应。若需求价格高于供应价格，则扩大生产有利可图，供给上升；若需求价格低于供给价格，则减少生产有利，供给下降；若需求价格等于供给价格，则供给量和需求量保持不变。如果供求价格不等，随着时间的流逝，供给量对供求价格差的反应是否能使供给价格等于需求价格，这就是 **Marshall 稳定性问题**。

在大多数情况下 Walras 稳定性等价于 Marshall 稳定性，但对于某些特殊情况，这两种稳定性并不等价。

我们首先采用 Walras 假定来分析一种商品局部均衡稳

定性问题。

对供求不均衡的系统，价格起着反馈调节的作用，分析价格反馈调节过程的稳定性可以用微分方程，也可以用差分方程。这类动态方法的代表就是著名的“蛛网定理”，其特点是引入了供给量对价格反应的时滞概念。

设 $t$ 时刻的需求量 $x_t$ 是 $t$ 时刻价格 $p_t$ 的函数：

$$x_t=a-bp_t,\quad a>0,\quad b>0 \tag{4.4.1}$$

$t$ 时刻的供给量 $x'_t$ 是由 $t-1$ 时刻的价格 $p_{t-1}$ 决定的，因为生产中要进行调节，要增加供给量需要增加人员设备，要减少供给量也需要减少人员、设备，这都要耗费时间，因此供给量对价格作出反应总会产生时间滞后，于是供给函数可写为

$$x'_t=\alpha+\beta p_{t-1},\quad \beta>0 \tag{4.4.2}$$

在供求均衡的条件下，价格不再变动，$p_t=p_{t-1}=\bar{p}$，$\bar{p}$ 为均衡价格，且均衡时需求 $x_t$ 等于供给 $x'_t$。于是

$$a-\bar{p}=\alpha+\beta\bar{p}$$

从中可解出均衡价格

$$\bar{p}=\frac{a-\alpha}{b+\beta} \tag{4.4.3}$$

这就是静态均衡价格。将上式代入供给函数可算出均衡交易量

$$\bar{x}=\alpha+\beta\bar{p}=\frac{\alpha b+a\beta}{b+\beta} \tag{4.4.4}$$

实际购买量总是等于实际售卖量，因此我们可以令 $x_t=x'_t$。将式（4.4.1）和式（4.4.2）代入，则有

$$a-bp_t=\alpha+\beta p_{t-1} \tag{4.4.5}$$

而均衡时的交易量为

$$a-b\bar{p}=\alpha+\beta\bar{p} \tag{4.4.6}$$

用式（4.4.5）减去式（4.4.6）就是实际交易量与均衡交易量 $\bar{x}$ 之差额，即

$$x_t-\bar{x}=-b(p_t-\bar{p})=\beta(p_{t-1}-\bar{p}) \qquad (4.4.7)$$

令 $\hat{x}_t=x_t-\bar{x}$，$\hat{p}_t=p_t-\bar{p}$，$\hat{p}_{t-1}=p_{t-1}-\bar{p}$，代入上式，我们有

$$\hat{x}_t=-b\hat{p}_t=\beta\hat{p}_{t-1} \qquad (4.4.8)$$

令 $A=-\dfrac{\beta}{b}$，则上式可改写为

$$\hat{p}_t=A\hat{p}_{t-1} \qquad (4.4.9)$$

这是一个一阶差分方程，设 $\hat{p}_0=p_0-\bar{p}$ 为初始时刻实际价格与均衡价格之偏差，则我们可以利用差分方程式（4.4.9）进行一系列迭代求解：

$$\hat{p}_1=A\hat{p}_0$$
$$\hat{p}_2=A\hat{p}_1=A(A\hat{p}_0)=A^2\hat{p}_0$$
$$\hat{p}_3=A\hat{p}_2=A(A^2\hat{p}_0)=A^3\hat{p}_0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\hat{p}_t=A\hat{p}_{t-1}=A^t\hat{p}_0 \qquad (4.4.10)$$

式（4.4.10）给出了线性蛛网模型之通解，一般而言，$b>0$，即价格上升需求下降；且 $\beta>0$，即价格上升供给上升，所以 $A=-\dfrac{\beta}{b}<0$。当 $t$ 为偶数时，$A^t$ 为正数，当 $t$ 为奇数时，$A^t$ 为负数。当 $t$ 不断从偶数变为奇数，又从奇数变为偶数时，$A^t$ 从大于 0 变成小于 0，又从小于 0 变成大于 0，这就使实际价格与均衡价格的差 $\hat{p}_t$ 一会儿大于 0，一会儿小于 0。即实际价格一会儿高于均衡价格，一会儿低于均衡价格，这就是价格反馈调节中的时滞造成的振荡，如图 4.6 所示，其中图（$a$）以供求量为横坐标，以价格 $p$ 为纵坐标描述了这种振荡。而图（$b$）以时间 $t$ 为横坐标，价格 $p$ 为纵坐标，用时间序列描述了这种振荡。初始时

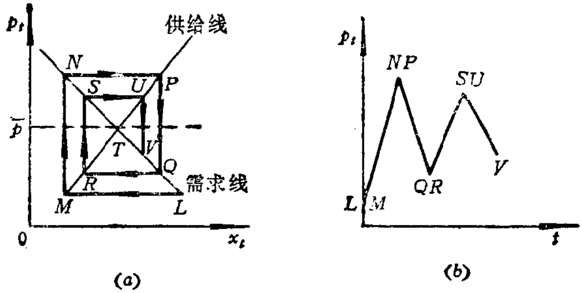



图 4.6

刻实际价格在 $ML$ 水平上，低于均衡价格 $\bar{p}$。需求量在 $L$ 点大于 $M$ 点决定的供给量，因此价格从 $ML$ 水平上升到 $NP$ 水平。这时价格高于均衡价格 $\bar{p}$，$P$ 点确定的供给量大于 $N$ 点确定的需求量，因而价格下降到 $QR$ 水平。这时价格低于均衡水平 $\bar{p}$，$R$ 确定的需求量大于 $Q$ 点确定的供给量，所以价格又从 $QR$ 上升到 $SU$。如此往复振荡，只要 $|A|=\left|-\frac{\beta}{b}\right|<1$，则振荡过程是收敛的。随着 $t\to\infty$，则 $A^t\to 0$，$\hat{p}_t\to 0$，即 $p_t\to\bar{p}$。也就是说振荡的幅度越来越小，最后稳定在图 4.6 中的 $p_t=\bar{p}$ 直线上。

这种价格与供求量之间的反馈调节过程并不一定振荡，振荡也不一定收敛。是否振荡由 $A=-\frac{\beta}{b}$ 的符号决定。若 $A<0$，则随着 $t$ 的增大，$t$ 一会儿是奇数，一会儿是偶数，$A^t$ 一会儿为负，一会儿为正，这就有振荡。若 $A>0$，则反馈调节没有振荡，调节过程是单调的。$A$ 的绝对值与数字 1 的关系决定调节过程是收敛还是发散，或既不收敛又不发散。若 $|A|=\left|-\frac{\beta}{b}\right|>1$，则 $A^t$ 随 $t$ 的增大，其绝对值越来越大，与均衡价格的偏差 $\hat{p}_t$ 也越来越大，所以调节

过程是发散的；若$|A|<1$，则$A^t$的绝对值随$t$增大而越来越小，与均衡价格的偏差$\hat{p}_t$也越来越小，调节过程是收敛的，最后稳定在均衡状态。若$|A|=1$，则$A^t$的绝对值总不变，$\hat{p}_t$也总是不变，也就是说实际价格与均衡价格的偏差既不扩大也不缩小。

$A$大于0还是小于0决定了反馈调节是正反馈还是负反馈。$A>0$，则是正反馈，没有振荡，$A<0$则为负反馈，将出现振荡。$A$的绝对值可能有三种状态，它决定了反馈调节过程是收敛还是发散的。$|A|>1$则反馈调节过程为发散的，$|A|<1$则反馈调节过程为收敛的。$|A|=1$则反馈调节过程既不发散也不收敛。$A$的符号(两种可能)及绝对值（三种可能）互相组合，则有六种可能的价格反馈调节状态。

（1）$A<0$，$|A|>1$，即$\beta>b$。这是一种发散的负反馈调节，如图4.7所示，这是增幅振荡过程。

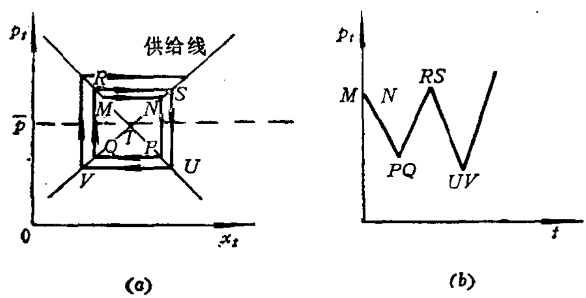



图 4.7

（2）$A<0$，$|A|<1$，即$\beta<b$。这是收敛的负反馈调节，如图4.6所示，前文已作了详细叙述。

（3）$A<0$，$|A|=1$，即$\beta=b$。这是既不收敛又不发散的负反馈调节，如图4.8所示，调节过程是等幅振荡。

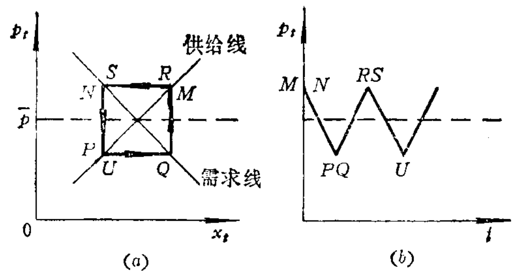



图 4.8

例如母猪的喂养量与小猪的价格成正比，而母猪要养一年后才能生小猪，所以小猪供应量对小猪价格变化的反应有一年时滞。若初始时刻小猪价格低于均衡价格，则母猪喂养量低于均衡值，一年后小猪供应量低于均衡量，使小猪价格上涨，因而母猪喂养量增多。但新增的母猪要一年后才能生小猪，所以小猪供应量仍低于均衡水平，而小猪价格仍高于均衡价格，因此又使母猪喂养量过多，一年后小猪供应量又超过均衡量……，如此上下振荡。如果人们对这种时滞造成的振荡没有预见，则小猪供求永远不能达到均衡，而总是在均衡水平上下振荡。

（4）$A>0$，即$b$与$\beta$符号相反，这可能是$b>0$，$\beta<0$，意味着价格上涨供应减少（$\beta<0$）；也可能是$b<0$，$\beta>0$，意味着价格上涨，需求增加。这种情况极少，但并不一定不可能。例如对劣等商品的需求，若收入效应大于价格效应就会出现价格上升，需求减少的情况，即Giffen效应。若$|A|>1$，即$|\beta|>|b|$，这时是发散的负反馈，供求量和价格离均衡水平越来越远。如图4.9所示。

（5）$A>0$，$|A|<1$，即$|\beta|<|b|$，也就是供给线之斜率小于需求线之斜率，需求线比供给线更陡，如图4.10

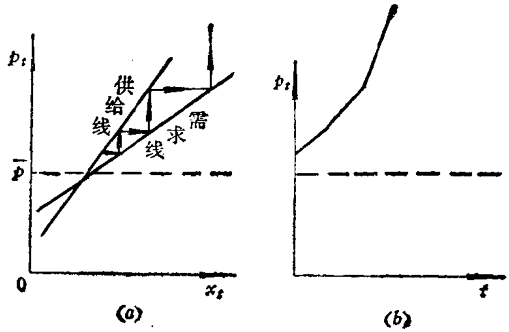



图 4.9

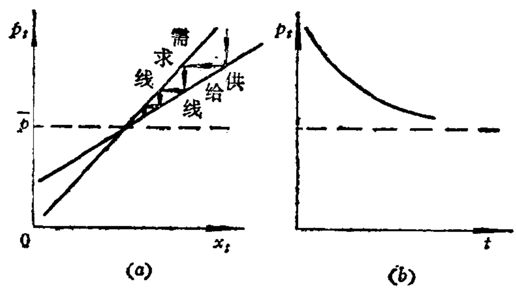



图 4.10

所示。这是种收敛的正反馈，最后系统趋于均衡状态，但调节过程是单调的，没有振荡。

（6）$A>0, |A|=1$，即$|\beta|=|b|$。这或者意味着供给线与需求线重合，系统处于随处平衡，或者意味着供给线与需求线平行，根本没有均衡点，这当然是不可能出现的情况。

上文中我们讨论了局部均衡反馈调节的离散模型，下面我们讨论局部均衡价格反馈调节的连续模型。

设需求函数为

$$x = a + bp, \quad a > 0, \quad b < 0 \tag{4.4.11}$$

供给函数为

$$x' = \alpha + \beta p, \quad \beta > 0 \tag{4.4.12}$$

价格是反馈调节的工具，它传输供求差的信息。设价格随时间的变化速度正比于过量需求（$x - x'$），则有反馈调节的微分方程

$$\frac{dp}{dt} = k(x - x'), \quad k > 0 \tag{4.4.13}$$

其中 $k$ 为调节系数，它的大小反映了价格对供求差反应的灵敏度。当过量需求（$x - x'$）$> 0$ 时，供不应求，$\frac{dp}{dt} > 0$，即价格上升；当过量需求（$x - x'$）$< 0$ 时，供过于求，$\frac{dp}{dt} < 0$，即价格下降。当供求均衡时，$(x - x') = 0$，$\frac{dp}{dt} = 0$，价格不再变化。将式（4.4.11）和式（4.4.12）代入式（4.4.13）则我们有

$$\frac{dp}{dt} = k[(a - \alpha) + (b - \beta)p] \tag{4.4.14}$$

供求均衡时，$\frac{dp}{dt} = 0$，代入上式，则可解出均衡价格

$$\bar{p} = \frac{a - \alpha}{\beta - b} \tag{4.4.15}$$

设实际价格与均衡价格之偏差为

$$\hat{p} = p - \bar{p} \tag{4.4.16}$$

将此式对时间 $t$ 求导数，则

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{d\bar{p}}{dt} \tag{4.4.17}$$

将 $p = \bar{p}$ 代入式（4.4.14），则

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = k[(a - \alpha) + (b - \beta)\bar{p}] \tag{4.4.18}$$

将式（4.4.14）和式（4.4.18）代入式（4.4.17），我们有

$$\frac{d\hat{p}}{dt}=k[(a-\alpha)+(b-\beta)p]-k[(a-\alpha)+(b-\beta)\bar{p}]=k(b-\beta)(p-\bar{p})$$
$$=k(b-\beta)\hat{p} \tag{4.4.19}$$

令 $b-\beta=r$，则上式可写成

$$\frac{d\hat{p}}{dt}=kr\hat{p} \tag{4.4.20}$$

解这一可分离变量微分方程，得到通解

$$\hat{p}=\hat{p}_0 e^{krt} \tag{4.4.21}$$

其中 $\hat{p}_0$ 为积分常数，表示 $t=0$ 的初始时刻实际价格与均衡价格的偏差。

一般说来，$b<0$，也就是说需求函数的斜率是负的，价格越高需求量越小，所以 $r=b-\beta<0$。而 $k$ 一般大于0，即供不应求涨价，供过于求跌价。所以式（4.4.21）中 $e$ 的指数 $krt<0$。因此随着时间的流逝，$e^{krt}\to 0$，$\hat{p}\to 0$，即 $p\to\bar{p}$。这是一个单调非振荡的收敛正反馈过程，收敛的速度由 $kr$ 决定。也就是说需求对价格的反应和供给对价格的反应越敏感，价格变化对过量需求越敏感，则收敛得越快，亦即供求达到均衡的速度越快。描述初始干扰的 $\hat{p}_0$ 的符号决定了初始价格是高于还是低于均衡价格，反馈调节是从均衡价格上面还是从均衡价格下面趋近于均衡价格。

若需求函数是第二章式（2.8.7）或式（2.8.10）那种包含价格对时间导数的非线性函数，反馈调节的微分方程式（4.4.13）又不是一阶线性的，则稳定性问题就是判断高阶微分方程的解之稳定性问题。常微分方程解的稳定性理论可以用来作为价格调节过程稳定性分析的工具。

若需求函数是第二章式（2.8.10），式（2.8.13）那种包含价格的差分的非线性函数，反馈调节的差分方程也不是一阶线性差分方程，则稳定性问题就是判断高阶差分方程解之稳定性问题。差分方程解的稳定性理论可以用来作为价格调节过程稳定性分析的工具。

由物价管理部门控制价格的体制下，价格对过量需求函数作出反应的调节微分方程（或差分方程）往往是非线性的，调节过程出现不稳定的发散现象屡见不鲜，例如价格离供求均衡的价格水平越来越远，供求差额越来越大，最后不得不进行一次跳跃式的物价改革才能解决问题。

$n$ 种商品一般均衡的稳定性问题就是将每种商品的价格变化速度写成过量需求的函数，则得到 $n$ 个微分方程，然后讨论联立微分方程组的解之稳定性问题。

如果有三种商品，需求函数为线性形式

$$x_i=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+a_{i3}p_3,\quad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.4.22)$$

供给函数为

$$x'_i=b_{i1}p_1+p_{i2}p_2+b_{i3}p_3,\quad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.4.23)$$

过量需求函数为

$$\begin{aligned}e_i&=(a_{i1}-b_{i1})p_1+(a_{i2}-b_{i2})p_2+(a_{i3}-b_{i3})p_3\\&=\alpha_{i1}p_1+\alpha_{i2}p_2+\alpha_{i3}p_3 \qquad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.4.24)\end{aligned}$$

价格调节微分方程为

$$\begin{aligned}\dot{p}_i&=k_ie_i=k_i(\alpha_{i1}p_1+\alpha_{i2}p_2+\alpha_{i3}p_3)\\&=\beta_{i1}p_1+\beta_{i2}p_2+\beta_{i3}p_3 \qquad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (4.4.25)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_{i1}&=k_i\alpha_{i1}=k_i(a_{i1}-b_{i1})\\\beta_{i2}&=k_i\alpha_{i2}=k_i(a_{i2}-b_{i2}) \qquad (4.4.26)\\\beta_{i3}&=k_i\alpha_{i3}=k_i(a_{i3}-b_{i3})\end{aligned}$$

式（4.4.25）可用矩阵向量形式记为

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{BP} \tag{4.4.27}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\begin{pmatrix}\dot{p}_1\\ \dot{p}_2\\ \dot{p}_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}\end{pmatrix} \tag{4.4.28}$$

我们可进行适当变换，令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AZ},\ \boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{AZ}_0 \tag{4.4.29}$$

使得

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Z}} \tag{4.4.30}$$

因而

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BAZ} \tag{4.4.31}$$

我们只要适当地选择$\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}$ 可以成为对角矩阵。根据线性代数，只要用$\boldsymbol{B}$的特征向量作为$\boldsymbol{A}$的列，则$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}$可以变成对角矩阵，令其为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA},$$

于是

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{DZ} \tag{4.4.32}$$

根据一阶线性微分方程组求解公式，上式的解类似于一元线性微分方程通解的形式：

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{e}^{\Lambda t}\boldsymbol{Z}_0 \tag{4.4.33}$$

其中 $\boldsymbol{e}^{\Lambda t}$ 为一对角矩阵：

$$\boldsymbol{e}^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix} \tag{4.4.34}$$

$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ 为矩阵$\boldsymbol{B}$之特征根。将式（4.4.33）代入式(4.4.29)，则式（4.4.27）之解可写为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Ae}^{\Lambda t}\boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{Ae}^{\Lambda t}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_0 \tag{4.4.35}$$

其中 $\boldsymbol{P}_0=(p_{10},\ p_{20},\ p_{30})'$ 为初始时刻的价格，$\boldsymbol{A}$ 为$\boldsymbol{B}$矩阵

特征向量构成的矩阵。

这种一般均衡系统当$B$矩阵之本征值为负时，微分方程组的解是稳定的，或者，微分方程组的解稳定的必要条件为$B$之特征根满足

（1） $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i<0$$

（2）当$n$为偶数时， $$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i>0 \qquad (4.4.36)$$

当$n$为奇数时， $$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i<0$$

我们这里举的例子中共有3个微分方程，$n=3$为奇数，因此稳定性的条件为

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3<0;\quad \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3<0 \qquad (4.4.37)$$

联立微分方程组解的稳定性还有各种不用求解方程组的判据，如李雅普诺夫稳定性判据，相图分析法等等。

总之市场价值规律调节的稳定性问题实际上就是联立微分方程组或联立差分方程组解的稳定性问题。微分方程组、差分方程组稳定性理论是研究一般均衡稳定性的主要工具。但是与一般纯数学中的稳定性理论不同的是，一般均衡稳定性理论要利用从效用函数特性导出的需求函数特性及从生产函数特性导出的供给函数特性来分析稳定性问题。

从直观上来说，如果在一种价格体制下，长期出现某些产品供不应求，而另一些产品却供过于求，价格制度无法使供求达到均衡，必须依靠票证等非价格手段调节供求，这种体制下的价格调节机制就是不稳定的。在很多由物价管理部门集中控制价格的国家，这种现象较为常见。

# 第五章　经济结构的最优化

## §5.1　分工度与流通

根据第一章§1.8关于分工度的定义，分工度$f$可由两两专业经纪人之间的流量数$M$表示：

$$f=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4M}\right) \qquad (5.1.1)$$

其中$M$为两两专业经纪人之间的流量数，$f$为分工度。从上式解出$M$，则

$$M=f(f-1) \qquad (5.1.2)$$

也就是说经济系统的物资或信息流量数$M$是分工度$f$的二次函数。

我们首先不考虑信息流量，只考虑物资流量。假设每对协作关系中的流量都是物资流量，每个流量的**平均物资流通速率**为$q$吨，则整个经济系统总的**流通物资量**为

$$Q=qM \qquad (5.1.3)$$

设每个流量的**平均运距**为$l$，我们定义**流通功**为平均运距$l$与总流通量$Q$的乘积。如果令所有流量的**总运距**为$L$，则

$$L=lM \qquad (5.1.4)$$

所以流通功又是平均流通速率$q$与总运距$L$之乘积。令流通功为$A$，则

$$A=lQ=lqM \qquad (5.1.5)$$

276476

或 $$A=qL=qlM$$

其单位为吨公里。将式（5.1.2）代入上式，则

$$A=lqf(f-1) \tag{5.1.6}$$

若每吨公里平均运费为$\mu$，则系统总的流通费用$C'$为

$$C'=\mu A=\mu lqf(f-1) \tag{5.1.7}$$

从上式不难看出，流通费用是分工度$f$的二次函数，当分工度$f$上升时，流通费用不但跟着上升，而且比分工度上升得更快。

若定义运输效率为每元运费可运输的吨公里数，则运输效率$v$为

$$v=\frac{1}{\mu} \tag{5.1.8}$$

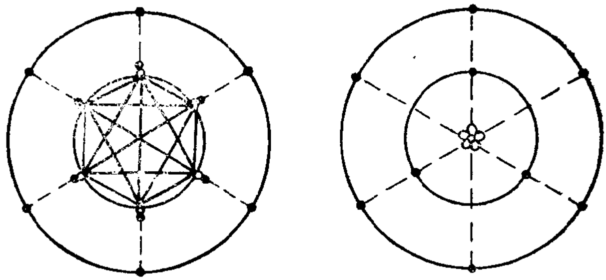
于是流通费用可写成流通效率$v$和分工度$f$的函数，即

$$C'=\frac{q}{v}lf(f-1) \tag{5.1.9}$$

实际上每一流量的平均运距$l$并不是一个不变的常数，它与工业的地理布局有密切的关系。

为了说明工业布局与两两经纪人之间平均距离的关系，我们首先引入两个新概念，然后举一个简化的例子说明。

图 5.1 中的黑点表示农业经纪人，农业生产由于受土地生产率限制，必须分散均匀分布，我们将必须分散均匀布局的经纪人简称为**分散经纪人**；图中的白点为工业经纪人，大多数制造业及科研、教育等机构较少受土地的限制，它们基本上可以自由布局，既可以集中在大城市中，也可以分散在各地。我们将可以自由布局的专业经纪人简称为**自由经纪人**。设自由经纪人两两之间都有协作关系，而分散经纪人之间由于属于同一专业，没有什么协作关系。但分散经纪人与所有



(a)　　　　(b)

图　5.1

自由经纪人之间都有协作关系。图 5.1 中的实线代表自由经纪人之间的流通渠道，虚线代表自由经纪人与分散经纪人之间的流通渠道，若虚线与实线重合，则虚线略去。内小圆的半径为 $r$，外大圆的半径为 $2r$。

图（$a$）和图（$b$）是 9 个分散经纪人与 6 个自由经纪人的两种不同的布局方式。图（$a$）和图（$b$）中的分散经纪人都只能均匀地分散布局。但图（$a$）中的 6 个自由经纪人是均匀分散布局：而在图（$b$）中 6 个自由经纪人却集中到一个中心城市内。

对于图（$a$）的布局，根据几何学不难算出所有流通渠道的总距离为

$$(9+3\sqrt{3})r+3(3+\sqrt{3})r+6(4+\sqrt{3})r$$
$$=(42+12\sqrt{3})r\doteq 62.7846r$$

而流通渠道的总数为

$$15+54=69$$

所以每个流通渠道的平均距离为

$$l=\frac{62.7846r}{69}=0.9099r$$

图（$b$）中的6个工业企业集中在一个城市中，自由经纪人之间的流通距离相对于城市外而言，可近视为0，所以总流通距离为

$$3r+6(2r)=15r$$

每个流通渠道的平均距离为

$$l=\frac{15r}{69}=0.2174r$$

在上述简化的例子中，图（$b$）中工业集中布局每一流通渠道的平均距离是图（$a$）中工业分散布局流通渠道平均距离的24%。

但是并不是工业布局越集中，流通渠道的平均距离越小。对于一个大经济系统来说，工业布局太集中，自由经纪人之间的流通距离很近，但自由经纪人与分散经纪人之间的流通距离会增加，因而有可能抵销自由经纪人之间流通距离小的好处，使总的流通渠道平均距离较高。所以，有一个工业布局的最优集中度问题。

工业布局的集中度可以用第一章§1.7中计算基尼系数的式（1.7.13）计算。

设$i$地区（或城市）的面积占经济系统总面积的比重为$w_i(i=1,\cdots,m)$，而$i$地区的工业产值占整个经济系统工业总产值的比重为$v_i(i=1,\cdots,m)$，我们将$m$个地区（或城市）按每平方公里工业产值由低到高排列，则根据$v_i$可算出每每平方公里工业产值不高于某一水平的地区之工业产值占系统工业总产值的累积比重$V_i(i=1,\cdots,m)$，于是**工业布局的集中度**可用下式计算：

$$G=w_1v_1+w_2v_2+\cdots+w_nv_m+2[w_1(1-V_1)+w_2(1-V_2)+\cdots+w_{m-1}(1-V_{m-1})]-1 \quad (5.1.10)$$

设自由经纪人之间的平均距离为 $l_1$，则工业布局集中度 $G$ 越高，自由经纪人两两之间的平均距离 $l_1$ 就越小，它们的关系可近似写为

$$l_1=\frac{a'}{G} \quad (5.1.11)$$

又设自由经纪人有 $m$ 个，而分散经纪人有 $n$ 个，且分散经纪人到自由经纪人的总平均距离为 $l_2$，则 $l_2$ 正比于工业布局的集中度 $G$，也就是说工业布局越集中，自由经纪人之间的平均距离 $l_1$ 越小，但自由经纪人与分散经纪人之间的平均距离 $l_2$ 却会越大，这可写成近似函数关系

$$l_2=b'G \quad (5.1.12)$$

式（5.1.11）中的 $a'$ 和式（5.1.12）中的 $b'$ 为比例常数。

假定自由经纪人所从事的专业都各个不同，两两之间都有协作关系，则两两之间的流通渠道数为

$$\frac{1}{2}m(m-1)$$

若自由经纪人之间有的人从事同一专业，或两两之间不一定都有协作关系，则我们可以加上比率系数 $k_1$，则自由经纪人之间的流通渠道数为

$$k_1m(m-1)$$

于是自由经纪人之间的总流通距离数为

$$k_1l_1m(m-1) \quad (5.1.13)$$

如果每个分散经纪人与所有 $m$ 个自由经纪人都有协作关

系，则分散经纪人与自由经纪人之间的流通渠道数为

$$m \cdot n$$

如果每一分散经纪人只与$m$个自由经纪人中的一部分有协作关系，则设比率系数为$k_2$，于是分散经纪人与自由经纪人之间的流通渠道数为

$$k_2 mn$$

而分散经纪人与自由经纪人之间的总流通距离为

$$k_2 l_2 mn \tag{5.1.14}$$

所以系统之总流通距离为

$$L = L_1 + L_2 = k_1 l_1 m(m-1) + k_2 l_2 mn \tag{5.1.15}$$

于是整个经济系统中所有经纪人之间流通渠道平均长度为

$$\begin{aligned} l &= \frac{L}{k_1 m(m-1) + k_2 mn} \\ &= \frac{k_1 m(m-1)}{k_1 m(m-1) + k_2 mn} l_1 + \frac{k_2 mn}{k_1 m(m-1) + k_2 mn} l_2 \\ &= \alpha' l_1 + \beta' l_2 \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

其中

$$\alpha' = \frac{k_1 m(m-1)}{k_1 m(m-1) + k_2 mn} = \frac{k_1(m-1)}{k_1(m-1) + k_2 n} \tag{5.1.17}$$

为自由经纪人（主要是工业企业）之间流通渠道数占总流通渠道数的比重，而

$$\beta' = \frac{k_2 mn}{k_1 m(m-1) + k_2 mn} = \frac{k_2 n}{k_1(m-1) + k_2 n} \tag{5.1.18}$$

为分散经纪人（主要是农业经纪人）与自由经纪人之间流通

渠道数占总流通渠道数的比重。随着分工的发达，工业内部分工度提高的速度大大高于农业内部分工度提高的速度，工业的专业经纪人数 $m$ 会增加，而农业经纪人数 $n$ 会减少，因此 $\alpha'$ 会随分工度 $f$ 的上升而增加，而 $\beta'$ 会随分工度 $f$ 的上升而下降。若这种关系简化为近似的幂函数关系，则可做出经济计量模型：

$$\alpha' = Af^{\alpha}，\ \beta' = Bf^{-\beta} \tag{5.1.19}$$

其中 $A$，$B$，$\alpha$，$\beta > 0$，且 $\alpha$，$\beta < 1$。

将式（5.1.11），式（5.1.12）和式（5.1.19）代入式（5.1.16），则有所有流通渠道的平均长度与工业布局集中度 $G$ 之间的关系：

$$l = \frac{a'\alpha'}{G} + b'\beta' G = \frac{a}{G} f^{\alpha} + bGf^{-\beta} \tag{5.1.20}$$

其中 $a = a'A$，$b = b'B$。

将 $l$ 分别对 $G$ 求偏导数且令其等于0，则可解出使 $l$ 极小化的最优工业布局集中度

$$G^* = \sqrt{\frac{a}{b}} f^{1/2(\alpha+\beta)} \tag{5.1.21}$$

由于 $\frac{dG^*}{df} > 0$，所以分工度越高，则工业布局的最优集中度 $G^*$ 亦越高。也就是说分工越发达，工业集中布局越有利于减少流通距离和流通费用。

将式（5.1.20）代入总流通费用函数式（5.1.9），则可将总流通费用写成工业布局集中度 $G$，分工度 $f$ 和流通效率 $v$ 的函数：

$$C^t=\frac{q}{v}\left(\frac{a}{G}f^{\alpha}+bGf^{-\beta}\right)f(f-1)$$

$$=\frac{q}{v}\left(\frac{a}{G}f^{\alpha+1}+bGf^{1-\beta}\right)(f-1) \quad (5.1.22)$$

流通费用函数式（5.1.22）有如下特性：

（i）$$\frac{\partial C^t}{\partial v}=-\frac{q}{v^2}\left(\frac{a}{G}f^{\alpha+1}+bGf^{1-\beta}\right)(f-1)<0 \quad (5.1.23)$$

即流通效率越高，流通费用越低。

（ii）$$\frac{\partial C^t}{\partial f}=\frac{q}{v}\left\{\left[\frac{a(\alpha+1)}{G}f^{\alpha}+b(1-\beta)Gf^{-\beta}\right](f-1)+\frac{a}{G}f^{\alpha+1}+bGf^{1-\beta}\right\}$$

$$=\frac{q}{v}\left\{\frac{a}{G}f^{\alpha}[(\alpha+2)f-(\alpha+1)]+bGf^{-\beta}[(2-\beta)f-(1-\beta)]\right\} \quad (5.1.24)$$

由于 $\beta<2$，且 $f\gg 1$，所以

$$\frac{\partial C^t}{\partial f}>0 \quad (5.1.25)$$

（iii）$$\frac{\partial^2 C^t}{\partial f^2}=\frac{q}{v}\left\{\left[\frac{a\alpha(\alpha+1)}{G}f^{\alpha-1}-b\beta(1-\beta)Gf^{-\beta-1}\right](f-1)+2\frac{a(\alpha+1)}{G}f^{\alpha}+2b(1-\beta)Gf^{-\beta}\right\}$$

$$=\frac{q}{v}\left\{\frac{a(\alpha+1)}{G}f^{\alpha}[\alpha f^{-1}(f-1)+2]+b(1-\beta)Gf^{-\beta}\left(2-\frac{\beta}{f}\right)\right\} \quad (5.1.26)$$

$\because \quad f \gg 1, \qquad \therefore 0 < \frac{1}{f} \ll 1 \qquad \therefore \frac{\beta}{f} < 2$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 C^t}{\partial f^2} > 0 \tag{5.1.27}$$

即流通费用随分工度的上升而加速上升，也就是说随着分工的发展，流通费用的增长快于分工度的增长。

$$\text{(iv)} \ \frac{\partial C^t}{\partial G} = \frac{q}{v}\left(-\frac{a}{G^2} f^{\alpha+1} + b f^{1-\beta}\right)(f-1) \tag{5.1.28}$$

此式说明流通费用不是工业布局集中度$G$的单调函数，当

$$G < \sqrt{\frac{a}{b}} f^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tag{5.1.29}$$

时，$\frac{\partial C^t}{\partial G} < 0$，即提高工业分布集中度可以减少流通费用，当

$$G > \sqrt{\frac{a}{b}} f^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tag{5.1.30}$$

时，$\frac{\partial C^t}{\partial G} > 0$，即继续提高工业分布集中度会使流通费用上升。因此只有当工业分布集中度与分工度$f$相适应且满足式（5.1.21）所示的关系时，可使流通费用极小化。

## §5.2 分工度与生产效率

分工度提高后，生产者的技能会大大提高，生产效率会大大提高。专业化程度的提高是先进技术产生的源泉之一。另外，很多高精尖技术只有在专业化水平很高的大批量集中时

才具有经济价值。我们在第一章介绍了分工的本质是经济矩阵的转置。分工与专业产品生产的集中是同一件事的两个侧面，所以分工度提高意味着专业产品生产的集中度（即专业产品生产的 Gini 系数）同时提高，这就会产生规模经济效果。很多大型专业设备在生产规模很大时利用率会大大提高，厂房、动力设备、供水等设备的利用效率都会因生产规模的扩大而提高。

如果暂时假定生产的收益与经济结构问题无直接关系，而与价格和消费者收入有关，则前几章关于效用函数、需求函数、生产函数、价格制度的调节作用的讨论就是解决这个问题的。而生产费用除了与投入的供求及价格有关之外，而且与经济结构有密切关系，也就是说它与分工度 $f$ 密切相关。

在其他情况不变的情况下，分工度 $f$ 越高，则生产一定量产品的生产费用 $C^p$ 越少。设生产费用与分工度的关系为

$$C^p = C^p(f) \tag{5.2.1}$$

由于 $C^p$ 是 $f$ 的减函数，所以

$$\frac{dC^p}{df} < 0 \tag{5.2.2}$$

我们分析最优经济结构问题主要是考虑怎样确定分工度 $f$ 和工业布局集中度 $G$，以使生产费用 $C^p$ 与流通费用 $C^t$ 之和最小。分工度太高，生产费用虽然低，但流通费用却很大，总费用仍较高；分工度太低，流通费用虽然少，但生产费用却太高。也就是说，由于流通费用增长比分工度增加得快，所以提高分工度使生产费用下降的好处在分工度太高时会被流通费用上升的坏处抵销，因而得不偿失。设总经营费用为 $T$，$T$ 是生产费用 $C^p$ 与运输费用 $C^t$ 之和，即

$$T = C^p + C^t$$
$$= C^p(f) + \frac{q}{v}\left(\frac{a}{G}f^{\alpha+1} + bGf^{1-\beta}\right)(f-1) \tag{5.2.3}$$

其中$a$，$\alpha$，$\beta$，$q$，$v$都是给定参数，只有$f$和$G$为变量，所以最优经济效果的一阶条件为

$$\frac{\partial T}{\partial f} = \frac{dC^p}{df} + \frac{\partial C^t}{\partial f} = 0 \tag{5.2.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial G} = \frac{\partial C^t}{\partial G} = 0 \tag{5.2.5}$$

式（5.2.4）可改写为

$$\frac{\partial C^t}{\partial f} = -\frac{dC^p}{df} \tag{5.2.6}$$

上式说明只有当提高分工度增加的流通费用等于提高分工度减少的生产费用时，分工度达到最优经济效果水平。也就是边际流通费用等于负边际生产费用时的经济结构为最优，它能使经济效果最优。

式（5.2.5）就是式(5.1.28)，其解就是式（5.1.21)，即

$$G^* = \sqrt{\frac{a}{b}} f^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

上式说明只有当工业布局集中度与分工度相适应时，经济结构才是最优的。

若给定流通效率参数$v$，则式（5.2.4）与式(5.2.5)联立有两个方程，两个未知数$f$和$G$，因而可解出最优分工度$f^*$和最优工业布局集中度$G^*$。

假定生产费用与分工度之间的关系可用经济计量模型

$$C^p = \gamma f^{-r} \tag{5.2.7}$$

描述，由于$\frac{dC^p}{df} < 0$，则参数要满足$\gamma > 0$，$r > 0$。

将
$$\frac{dC^p}{df} = -r\gamma f^{-r-1} \tag{5.2.8}$$

和式（5.1.24）代入最优经济效果的必 要 条件式（5.2.6），则有

$$\frac{q}{v}\left\{\frac{a}{G}f^{\alpha}[(\alpha+2)f-(\alpha+1)] + bGf^{-\beta}[(2-\beta)f-(1-\beta)]\right\} = r\gamma f^{-r-1} \tag{5.2.9}$$

从式（5.2.5）可解出

$$G = \sqrt{\frac{a}{b}}f^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tag{5.2.9'}$$

联立上两式可得到一个关于 $f$ 的超越方程：

$$f^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)-r-1} + \frac{q\sqrt{ab}}{r\gamma v}(\beta-\alpha-4)f - \frac{q\sqrt{ab}}{r\gamma v}(\beta-\alpha-2) = 0 \tag{5.2.10}$$

这方程只要给定参数$\alpha$，$\beta$，$a$，$b$，$r$，$\gamma$，$q$，$v$，则可用数值法解出$f^*$，它是上述参数的函数，即

$$f^* = f^*(v, \alpha, \beta, a, b, r, \gamma, q) \tag{5.2.11}$$

其中 $v$ 为流通效率，$\alpha$，$\beta$，$a$，$b$ 决定流通渠道平均长度 $l$ 与分工度 $f$ 及工业布局集中度$G$之间的关系，而 $r$，$\gamma$ 参数决定生产费用与分工度之间的关系，$q$ 为每一流通量的平均物理量。

将 $f^*$ 代入（5.2.9′），则可解出工业布局的最优集中度

$$G^* = G^*(v, \alpha, \beta, a, b, r, \gamma, q) \qquad (5.2.12)$$

运用类似从效用函数特性分析需求函数特性的方法，我们亦可以从流通费用函数式（5.1.22）和生产费用函数式(5.2.1)的特性来分析**最优分工度函数**式（5.2.11）和工业布局**最优集中度函数**式（5.2.12）的特性。

我们首先考虑最优解 $f^*$ 与参数 $v$ 的关系。

令最优经济效果必要条件式（5.2.4）为 $\Phi(f, v)$，即

$$\Phi(f, v) = \frac{dC^p}{df} + \frac{\partial C^t}{\partial f} = 0 \qquad (5.2.13)$$

根据隐函数求导法则易知

$$\frac{df^*}{dv} = -\frac{\partial\Phi/\partial v}{\partial\Phi/\partial f} = \frac{-\dfrac{\partial^2 C^t}{\partial f \partial v}}{\dfrac{d^2 C^p}{df^2} + \dfrac{\partial^2 C^t}{\partial f^2}} \qquad (5.2.14)$$

从总费用 $T$ 最小化的二阶条件，即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial f^2} = \frac{d^2 C^p}{df^2} + \frac{\partial^2 C^t}{\partial f^2} > 0 \qquad (5.2.15)$$

可判断式（5.2.14）之分母大于0，也就是说总费用函数为凸函数，其 Hessin 矩阵各阶行列式恒大于0时，总费用函数才有极小值。Hessin矩阵一阶行列式就是 $\frac{\partial^2 T}{\partial f^2}$，所以 $\frac{\partial^2 T}{\partial f^2} > 0$。

又从流通费用函数的特性（ii），即从式（5.1.24）可导出

$$\frac{\partial^2 C^t}{\partial f \partial v} = -\frac{q}{v^2}\left\{\frac{a}{G} f^{\alpha}[(\alpha+2)f-(\alpha+1)]\right.$$

$$\left. + bGf^{-\beta}[(2-\beta)f-(1-\beta)]\right\}$$

即

$$\frac{\partial^2 C^t}{\partial f \partial v} < 0$$

所以

$$\frac{df^*}{dv} > 0 \tag{5.2.16}$$

这是**最优分工度随流通效率上升而递增律**，即最优分工度是流通效率的增函数，流通效率越高，最优分工度亦越高。

将 $f^*$代入生产费用函数式（5.2.1），则可得到最小生产费用

$$C^{p*} = C^{p*}(f^*) \tag{5.2.17}$$

也就是说最小生产费用$C^{p*}$是最优分工度$f^*$的减函数，而根据最优分工度递增律，最优分工度$f^*$又是流通效率 $v$ 的增函数，所以将

$$f^* = f^*(v) \tag{5.2.18}$$

代入式（5.2.17），则得到

$$C^{p*} = C^{p*}[f^*(v)] \tag{5.2.19}$$

将$C^{p*}$对 $v$ 求导数，我们有

$$\frac{dC^{p*}}{dv} = \frac{dC^{p*}}{df^*} \frac{df^*}{dv} \tag{5.2.20}$$

根据式（5.2.2）

$$\frac{dC^{p*}}{df^*} < 0$$

根据（5.2.16）

$$\frac{df^*}{dv} > 0$$

所以

$$\frac{dC^{p*}}{dv} < 0 \qquad (5.2.21)$$

这叫**生产效率随流通效率上升而递增律**，或简称**流通效率决定生产效率律**。也就是说流通效率越高，最优分工度越高，因而生产费用越低，生产费用低就是生产效率高。这是经济结构问题中最重要的一条定律。这一定律的直观经济意义是，当流通效率不高时，分工度太高，则提高生产效率的好处小于增加流通费用的坏处，因而得不偿失。这时使分工的净利益（提高生产效率的好处减去增加流通费用的坏处或者说降低生产费用的好处减去增加流通费用的坏处）最大化（等价于总费用最小化）的最优分工度较低。但是若流通效率提高，则进一步提高分工度不会增加很多流通费用，而减少的生产费用却很多，因此最优分工度会上升，因而使生产费用下降，生产效率上升。

为什么地中海成为古希腊、古罗马发达的商品经济的摇篮，是因为海运流通效率高。为什么工业革命发生在海岛国家，而不发生在内陆国家，为什么经济最先发达的国家和地区都是海岛或被海洋包围的地区，这也与海洋流通效率高，容易提高分工度有关，其表现就是商业容易发展起来。美国的经济是由铁路等现代运输业的发展带动起来的，没有运输效率的迅速提高，不会有高效率的现代工业。

经济系统中的总经营费用$T$为生产费用$C^p$和流通费用$C^t$之和，即

$$T = C^p + C^t \qquad (5.2.22)$$

设生产费用占总经营费用的比重为$\delta_1$，流通费用占总经

营费用的比重为$\delta_2$，则

$$\delta_1=\frac{C^p}{T},\quad \delta_2=\frac{C^t}{T} \tag{5.2.23}$$

它们满足

$$\delta_1+\delta_2=1$$

将$\delta_1$对分工度$f$求导数，则

$$\frac{d\delta_1}{df}=\frac{T\frac{dC^p}{df}-C^p\frac{\partial T}{\partial f}}{T^2}$$

$$=\frac{T\frac{dC^p}{df}-C^p\left(\frac{dC^p}{df}+\frac{\partial C^t}{\partial f}\right)}{T^2}$$

$$=\frac{(T-C^p)\frac{dC^p}{df}-C^p\frac{dC^t}{df}}{T^2} \tag{5.2.24}$$

由于$T-C^p=C^t\geqslant 0$，$\frac{dC^p}{df}<0$（分工度越高，生产费用越低），且$C^p\geqslant 0$，$\frac{dC^t}{df}>0$（分工度越高，流通费用越高），所以

$$\frac{d\delta_1}{df}<0 \tag{5.2.25}$$

这叫做**生产费用占总经营费用比重递减率**，即分工越发达，生产方面的经济潜力相对越不重要。

将$\delta_2$对$f$求导数，则

$$\frac{d\delta_2}{df}=\frac{T\frac{\partial C^t}{\partial f}-C^t\frac{\partial T}{\partial f}}{T^2}$$

$$=\frac{C^{p}\frac{\partial C^{t}}{\partial f}-C^{t}\frac{\partial C^{p}}{\partial f}}{T^{2}} \qquad (5.2.26)$$

由于 $C^p$，$C^t$ 非负，$\frac{\partial C^t}{\partial f}>0$，$\frac{\partial C^p}{\partial f}<0$，所以

$$\frac{d\delta_2}{df}>0 \qquad (5.2.27)$$

这就是**流通费用比重递增律**。也就是说流通费用占总经营费用的比重随分工度上升而递增，流通中的经济潜力相对而言比生产潜力越来越重要。

$\delta_2$是非常重要的经济结构参数，它是经济发展阶段和水平的重要指标。用$\delta_2$可以反过来判断分工发展的水平，正象我们可以用外贸比重、商品率等指标间接测度分工度一样，我们也可以用流通费用占总经营费用的比重或用于流通的能源占总能源消耗的比重来间接测度分工度。用运输消耗的能源比重来间接测度分工度这一方法是我国经济学者茅于轼同志首先提出，我认为这一比重系数与恩格尔系数有同等重要的意义，权且将此系数称为茅氏系数。对于不同的国家，由于资源的地理分布不同，比较这一系数的值不能确切地说明什么问题，但对同一个国家或地区，不同历史时期该系数的变化，将有助于说明分工的发展。

当$\delta_2 \geqslant \delta_1$时，经济发展处在一个重要的转折阶段，即进入提高流通效率比提高生产效率更重要的时期。当$\delta_2>\delta_1$时，分工度就非常高了。美国的制造工业一半以上直接和间接为流通服务，制造运输工具——汽车、飞机、轮船等——的工业是美国经济的主要支柱。

回顾总流通量公式（5.1.3）

$$Q = qM = qf(f-1) \qquad (5.2.28)$$

将上文中解出的最优分工度 $f^*$ 代入（5.2.28），则得到全社会最优流通量

$$Q^* = qf^*(f^*-1)$$

若其他参数给定，则 $f^*$ 是流通效率 $v$ 的函数，将这个函数 $f^* = f^*(v)$ 代入上式，则最优流通总量亦可表为流通效率 $v$ 的函数，即

$$Q^* = qf^*(v)[f^*(v)-1] \qquad (5.2.29)$$

最优流通总量 $Q^*$ 是最优分工度 $f^*$ 的二次函数，因此

$$\frac{\partial Q^*}{\partial f^*} > 0 \qquad (5.2.30)$$

又由于 $\frac{\partial f^*}{\partial v} > 0$，所以

$$\frac{\partial Q^*}{\partial v} = \frac{\partial Q^*}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial v} > 0 \qquad (5.2.31)$$

也就是说，分工度越高，社会的总需求量越大；流通效率越高，社会总需求量也越大。$Q^*$ 实际上是社会商品的流转总量，也是社会对商品的最优需求总量。式（5.2.28）和式（5.2.29）是一种结构性最优需求函数，它与我们前几章不考虑经济结构问题，而只考虑要素最优组合时的需求函数不同。二者最大的差异是结构性需求函数与社会分工度和流通效率有关，而以前讲的需求函数不考虑流通费用对需求的影响，也不考虑经济结构差别及分工度高低对市场需求的影响。前几章的分析对于一个分工不发达的社会和一个分工非常发达的社会，从理论推导中看不出任何明显的差别。前几章所涉及的经济模型中没有区别经济系统结构差别的变量和参数，而本章的分析中引入了反映经济结构特点的变量——

分工度和工业布局的集中度。结构性需求函数式(5.2.28)和式（5.2.29）不是价格和收入的函数，而是分工度 $f$ 和流通效率 $v$ 的函数。分工度越高，流通效率越高，则社会对商品的最优总需求量 $Q^*$ 越大。

这一规律的直观经济意义是，新创的专业越多，即分工度越高，则新的专业经纪人会放弃过去自给自足的多样化生产，而集中精力生产某种专业产品，但任何消费者或任何生产过程都需要消耗多种多样的产品，因此新的专业生产者会对其他产品产生需求，因而使总需求量扩大，使总的市场扩大。对于一个分工度低的社会来说，尽管其人口众多，资源丰富，但大多数人自给自足地生产或消费，因而对商品的需求量是不大的。对于一个交通不便，流通效率低的地区，尽管商品生产价格低，人们收入不低，也不会对商品有多大的需求。因此扩大市场有赖于经济结构的变化，有赖于分工度的提高和流通效率的提高，所谓“市场趋于成熟”只是分工度相当高，经济结构趋于成熟的反映。

根据式（5.2.9′），可知最优工业布局集中度 $G^*$ 是最优分工度 $f^*$ 的函数

$$G^*=\sqrt{\frac{a}{b}}f^{*\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} \tag{5.2.32}$$

由于最优分工度 $f^*$ 又是流通效率 $v$ 的函数，即

$$f^*=f^*(v),\quad \frac{\partial f^*}{\partial v}>0 \tag{5.2.33}$$

所以

$$\frac{\partial G^*}{\partial v}=\frac{dG^*}{df^*}\ \frac{\partial f^*}{\partial v}>0 \tag{5.2.34}$$

因为

$$\frac{dG^*}{df^*}=\sqrt{\frac{\overline{a}}{b}}f^{*\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-1}>0 \qquad (5.2.35)$$

式（5.2.34）说明，流通效率越高，则工业布局的最优集中度越高。也就是流通效率越高，最优分工度越高；而分工度越高，工业集中布局越有利。

## §5.3 用线性规划求解最优分工结构

我们可以用线性规划将上节提出的最优经济结构理论实证化。

假设社会需要两种产品，用脚标 $c=1$，2表示，全社会有三个经纪人，这三个经纪人作为生产者用脚标 $i=1,2,3$ 表示，这三个经纪人作为消费者，用脚标 $j=1,2,3$ 表示。第 $i$ 人生产第 $c$ 种产品的单位成本为 $\theta_{ci}$。例如第1个人生产第1种产品的单位成本为 $\theta_{11}$，第2个人生产第1种产品的单位成本为 $\theta_{12}$，第3个人生产第1种产品的单位成本为 $\theta_{13}\cdots$。设第 $i$ 个人生产的第 $c$ 种产品量为 $z_{ci}$，而从第 $i$ 个生产者流到第 $j$ 个消费者处的 $c$ 商品量为 $x_{cij}$。例如从第1个人流到第2个人的第一种商品量为 $x_{112}$，从第2个人流到第3个人的第2种商品量为 $x_{223}$，如此等等。对于 $i=j$ 的 $x_{cij}$ 表示自给自足的产品量，对于 $i\neq j$ 的 $x_{cij}$ 表示商品交换和流通的产品量。若 $i$ 个经纪人生产的产品之商品率为 $p_i$，则自给率为 $1-p_i$，所以

$$1-p_i=\frac{\sum_{c=1}^{2}x_{cii}}{\sum_{c=1}^{2}z_{ci}} \qquad (5.3.1)$$

其中 $\sum_{c=1}^{2} z_{ci}=z_{1i}+z_{2i}$ 为第 $i$ 人生产的各种产品的总量，而 $\sum_{c=1}^{2} x_{cii}=x_{1ii}+x_{2ii}$ 为第 $i$ 人自给自足的各种产品的总量。所以商品率

$$p_i=1-(1-p_i)=\frac{\sum_{c=1}^{2} z_{ci}-\sum_{c=1}^{2} x_{cii}}{\sum_{c=1}^{2} z_{ci}} \quad (5.3.2)$$

上述两个公式很容易把产品数量乘上相应的价格用金额比率来表示自给率和商品率。

若从第 $i$ 个人处运输单位 $c$ 商品到第 $j$ 个人处的运费为 $\mu_{cij}$，例如 $\mu_{212}$ 表示从第 1 人处运一单位第 2 种产品到第 2 人处的运费。由于 $i=j$ 时，$\mu_{cij}$ 表示自给自足产品的运费，所以对于 $i=j$，$\mu_{cij}=0$。

这三个人都能生产两种产品，也都需要消费两种产品，他们可以完全自给自足地各人都生产两种产品，这样运费取极小值 0。但是由于各人生产不同产品的效率不同，由于效率是生产费用系数 $\theta_{ci}$ 的倒数，所以这亦意味着各人生产某种产品的费用系数 $\theta_{ci}$ 不同，在完全自给自足的条件下，一些生产某种产品效率低下的人也要从事非他所长的此种产品的生产，因此总生产费用很高。我们只要将经济结构改变，提高分工度，发挥各人的优势，从事专业化生产，就能使总生产费用大大下降，只要这种下降大于分工度上升增加的流通费用，则总经营费用，即生产费用与流通费用的和仍可以下降。这样创造的增加价值不是靠增加劳动和其他资源投入得来

的，而是靠改变经济组织结构，提高分工度得来的。

我们的问题是在满足需求又不超过资源约束的情况下，怎样选择最优分工协作计划和最优分工度以使生产费用与流通费用的总和最小化。

总生产费用$C^p$等于 3 人生产费用的总和，第 $i$ 个人生产 $c$ 产品的产品量为 $z_{ci}$，而第 $i$ 人生产 $c$ 种产品的单位成本为 $\theta_{ci}$，所以第 $i$ 人生产第 $c$ 种产品的费用为 $\theta_{ci}z_{ci}$，而第 $i$ 人生产 1，2 两种产品的总费用为 $\theta_{1i}z_{1i}+\theta_{2i}z_{2i}$，于是第 1 人的生产费用为

$$\theta_{11}z_{11}+\theta_{21}z_{21} \tag{5.3.3}$$

第 2 个人的生产费用为

$$\theta_{12}z_{12}+\theta_{22}z_{22} \tag{5.3.4}$$

而第 3 个人的生产费用为

$$\theta_{13}z_{13}+\theta_{23}z_{23} \tag{5.3.5}$$

于是 3 人的总生产费用为式 (5.3.3)，(5.3.4) 和 (5.3.5) 之总和，即总生产费用

$$C^p=\theta_{11}z_{11}+\theta_{21}z_{21}+\theta_{12}z_{12}+\theta_{22}z_{22}+\theta_{13}z_{13}+\theta_{23}z_{23} \tag{5.3.6}$$

这可写成简约的形式

$$C^p=\sum_{c=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\theta_{ci}z_{ci} \tag{5.3.7}$$

由于第 $c$ 种产品从 $i$ 人处运往 $j$ 人处的流量为 $x_{cij}$，相应的单位产品流通费用为 $\mu_{cij}$，所以 $c$ 产品从 $i$ 人运到 $j$ 人处的总运费为 $\mu_{cij}x_{cij}$。其中 $x_{cii}$ 为自给自足的产品量，所以 $\mu_{cii}=0$。第 1 人的产品之总运费为他输给所有人的产品运费之和，他输给自己的产品运费为 $\mu_{c11}x_{c11}$，由于 $\mu_{c11}=0$，

所以 $\mu_{c11}x_{c11}=0$。他输给第 2 个人的产品之运费为$\mu_{c12}x_{c12}$，他输给第 3 个人的产品之运费为 $\mu_{c13}x_{c13}$。由于每人都可以生产两种产品，即 $c=1$，2，所以第 1 人产品的总运费为

$$(\mu_{111}x_{111}+\mu_{112}x_{112}+\mu_{113}x_{113})+(\mu_{211}x_{211}+\mu_{212}x_{212}+\mu_{213}x_{213}) \tag{5.3.8}$$

而第 2 个人生产的两种产品运给 1，2，3 人的总运费为

$$(\mu_{121}x_{121}+\mu_{122}x_{122}+\mu_{123}x_{123})+(\mu_{221}x_{221}+\mu_{222}x_{222}+\mu_{223}x_{223}) \tag{5.3.9}$$

其中 $\mu_{122}=0$，$\mu_{222}=0$。

第 3 个人生产的两种产品的总运费为

$$(\mu_{131}x_{131}+\mu_{132}x_{132}+\mu_{133}x_{133})+(\mu_{231}x_{231}+\mu_{232}x_{232}+\mu_{233}x_{233}) \tag{5.3.10}$$

其中 $\mu_{133}=0$，$\mu_{233}=0$。

于是系统的总运费为式 (5.3.8)，(5.3.9) 和(5.3.10) 之和，即总流通费用

$$\begin{aligned}C^t=&(\mu_{111}x_{111}+\mu_{112}x_{112}+\mu_{113}x_{113})+(\mu_{211}x_{211}\\&+\mu_{212}x_{212}+\mu_{213}x_{213})+(\mu_{121}x_{121}+\mu_{122}x_{122}\\&+\mu_{123}x_{123})+(\mu_{221}x_{221}+\mu_{222}x_{222}+\mu_{223}x_{223})\\&+(\mu_{131}x_{131}+\mu_{132}x_{132}+\mu_{133}x_{133})+(\mu_{231}x_{231}\\&+\mu_{232}x_{232}+\mu_{233}x_{233})\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

上式可写成简约的形式

$$C^t=\sum_{c=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mu_{cij}x_{cij} \tag{5.3.12}$$

我们的目的是要选择最优生产计划 $z^*_{ci}$ 和最优流通计划 $x^*_{cij}$，以使生产费用 $C^p$ 与流通费用 $C^t$ 的总和最小。如果第 1 个人生产的第 1 种产品量 $z^*_{11}$ 很大，而不生产第 2 种产品，即 $z^*_{21}=0$，则意味着第 1 个人专门生产产品 1。所以 $z^*_{ci}$ 和 $x^*_{cij}$

也就决定了生产结构的最优分工度 $f^*$。我们的问题也就是求解最优分工结构和最优分工度，以使生产费用与流通费用之总和最小。

不过，我们还有一些约束条件，这就是生产计划 $z_{ci}$ 与流通计划 $x_{cij}$ 平衡的约束、资源约束、需求约束和非负约束。

（i）产销平衡约束

第 $i$ 个人生产的 $c$ 产品总量必须不小于他输给 1，2，3 个人的 $c$ 产品量之和。

例如第 1 人生产的第 1 种产品量为 $z_{11}$，而第 1 个人输给 1，2，3 个人的第 1 种产品量为 $x_{111}+x_{112}+x_{113}$，所以第 1 人生产第 1 种产品的产销平衡约束为

$$z_{11}\geqslant x_{111}+x_{112}+x_{113} \qquad (5.3.13)$$

而第 1 人生产第 2 种产品的产销平衡约束为

$$z_{21}\geqslant x_{211}+x_{212}+x_{213} \qquad (5.3.14)$$

产大于销的部分可以是库存、运输在途或损耗。

对于第 2 个人来说，生产两种产品的产销平衡约束分别为

$$z_{12}\geqslant x_{121}+x_{122}+x_{123} \qquad (5.3.15)$$

$$z_{22}\geqslant x_{221}+x_{222}+x_{223} \qquad (5.3.16)$$

第 3 个人生产两种产品的产销平衡约束分别为

$$z_{13}\geqslant x_{131}+x_{132}+x_{133} \qquad (5.3.17)$$

$$z_{23}\geqslant x_{231}+x_{232}+x_{233} \qquad (5.3.18)$$

式（5.3.13）至（5.3.18）可合写为一个简约的约束条件

$$z_{ci}\geqslant \sum_{j=1}^{3} x_{cij},\quad c=1,\ 2,\quad i=1,\ 2,\ 3 \qquad (5.3.19)$$

上式表示 $2\times 3=6$ 个不等式，不等式个数是 $c$ 的最大值和

$i$ 的最大值之乘积。

(ii) 资源约束

这里说的资源是广义的，它包括矿产、原料、燃料、劳动、已有的设备、厂房、资金等等。

假设第1，2，3个人都有两种资源：劳动和资金。我们用第1个下脚标 $m$ 表示资源种类，$m=1$ 表示劳动，$m=2$ 表示资金。令第 $i$ 个人拥有的第 $m$ 种资源量为 $k_{mi}$，$m=1，2$，$i=1，2，3$。例如第1个人拥有的劳动量为 $k_{11}$，而拥有的资金量为 $k_{21}$，而第2，3个人拥有的劳动量分别为 $k_{12}$，$k_{13}$，二者拥有的资金量分别为 $k_{22}$，$k_{23}$。

又设第 $i$ 个人生产单位 $c$ 产品占用第 $m$ 种资源的消耗系数为 $b_{mci}$，$m=1，2$，$c=1，2$，$i=1，2，3$。例如第1个人生产1单位第1种产品占用的劳动量为 $b_{111}$，占用的资金量为 $b_{211}$，他生产第2种产品的劳动和资金占用系数分别为 $b_{121}$，$b_{221}$。

同理，第2个人生产两种产品的劳动占用系数和资金占用系数分别为 $b_{112}$，$b_{212}$，$b_{122}$，$b_{222}$，而第3个人生产两种产品的劳动占用系数和资金占用系数分别为 $b_{113}$，$b_{213}$，$b_{123}$，$b_{223}$。总之第1个脚码表示占用的资源种类，第2个脚码表示生产的产品种类，第3个脚码表示不同的生产者。

第1个生产者生产的第1种产品量为 $z_{11}$，占用的劳动量为 $b_{111}z_{11}$，占用的资金量为 $b_{211}z_{11}$；他生产第2种产品的数量为 $z_{21}$，占用的劳动量和资金量分别为 $b_{121}z_{21}$，$b_{221}z_{21}$。于是第1人生产两种产品占用的劳动总量为

$$b_{111}z_{11}+b_{121}z_{21}$$

它不得大于第1人拥有的劳动时间量 $k_{11}$，即

$$b_{111}z_{11}+b_{121}z_{21}\leqslant k_{11} \qquad (5.3.20)$$

而生产两种商品占用第1人的资金总量亦不得大于他拥有的资金量$k_{21}$，即

$$b_{211}z_{11}+b_{221}z_{21}\leqslant k_{21} \tag{5.3.21}$$

同理，第2人生产两种产品占用的两种资源量不能大于他所拥有的两种资源量$k_{12}$和$k_{22}$，即

$$\begin{aligned} b_{112}z_{12}+b_{122}z_{22}\leqslant k_{12} \\ b_{212}z_{12}+b_{222}z_{22}\leqslant k_{22} \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

而第3个人生产两种产品占用的两种资源量亦不得大于他所拥有的两种资源量$k_{13}$，$k_{23}$，即

$$\begin{aligned} b_{113}z_{13}+b_{123}z_{23}\leqslant k_{13} \\ b_{213}z_{13}+b_{223}z_{23}\leqslant k_{23} \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

约束条件式（5.3.20）至式（5.3.23）可合写成简约的形式

$$\sum_{c=1}^{2} b_{mci}z_{ci}\leqslant k_{mi},\quad m=1,\ 2,\quad i=1,2,3 \tag{5.3.24}$$

上式表示的约束条件总数为$m$的最大数与$i$最大数之乘积，即$2\times3=6$个。

（iii）需求约束

所有生产者输给第$j$个消费者的$c$产品总量不得小于$j$消费者对$c$产品的需求量$d_{cj}$。由于$x_{cij}$表示从第$i$人输给第$j$人的$c$产品量，所以$\sum_{i=1}^{3}x_{cij}$表示所有生产者输给第$j$个消费者的$c$产品量，于是需求约束可写为

$$\sum_{i=1}^{3}x_{cij}\geqslant d_{cj},\quad c=1,\ 2,\quad j=1,\ 2,\ 3 \tag{5.3.25}$$

上式共有$2\times3=6$个约束条件。例如第1个消费者对第1,

2 种商品的需求分别为 $d_{11}$ 和 $d_{21}$，而所有生产者 输 给 他的第 1 种产品为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{1i1}=x_{111}+x_{121}+x_{131}$$

而所有生产者输给他的第 2 种产品为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{2i1}=x_{211}+x_{221}+x_{231}$$

所以对于第 1 个 消 费 者 （ $j=1$ ） 而 言，式 (5.3.25) 意味着

$$\begin{aligned} x_{111}+x_{121}+x_{131} &\geqslant d_{11} \\ x_{211}+x_{221}+x_{231} &\geqslant d_{21} \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

而对于第 2， 3 个消费者，约 束 条 件 式 (5.3.25) 分别为

$$\begin{aligned} x_{112}+x_{122}+x_{132} &\geqslant d_{12} \\ x_{212}+x_{222}+x_{232} &\geqslant d_{22} \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

和

$$\begin{aligned} x_{113}+x_{123}+x_{133} &\geqslant d_{13} \\ x_{213}+x_{223}+x_{233} &\geqslant d_{23} \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

(iv) 非负约束

$$z_{ci}\geqslant 0,\quad x_{cij}\geqslant 0,\quad c=1,\ 2;\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3 \tag{5.3.29}$$

将上述 4 类约束条件与总费用最小化的目标函数相结合则有线性规划问题

min： $T=c^{p}+c^{t}$

$$= \sum_{c=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} \theta_{ci} z_{ci} + \sum_{c=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \mu_{cij} x_{cij}$$

$$= \sum_{c=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} \left( \theta_{ci} z_{ci} + \sum_{j=1}^{3} \mu_{cij} x_{cij} \right) \qquad (5.3.30)$$

且服从约束条件

（i）产销平衡约束

$$z_{ci} \geqslant \sum_{j=1}^{3} x_{cij}, \quad c=1,\ 2;\ \ i=1,\ 2,\ 3\ (6\ 个) \qquad (5.3.31)$$

(ii) 资源约束

$$\sum_{c=1}^{2} b_{mci} z_{ci} \leqslant k_{mi}, \quad m=1,\ 2;\ \ i=1,\ 2,\ 3\ (6\ 个) \qquad (5.3.32)$$

(iii) 需求约束

$$\sum_{i=1}^{3} x_{cij} \geqslant d_{cj} \qquad c=1,\ 2;\ \ j=1,\ 2,\ 3\ (6\ 个) \qquad (5.3.33)$$

(iv) 非负约束

$$z_{ci} \geqslant 0,\ x_{cij} \geqslant 0,\ \ c=1,\ 2;\ i,\ j=1,\ 2,\ 3\ \ (24个) \qquad (5.3.34)$$

这个线性规划问题中资源拥有量 $k_{mi}$，需求量 $d_{cj}$ 外生给定，未知变量 $z_{ci}$ 和 $x_{cij}$ 共有 24 个，约束条件有（6 + 6 + 6 +24）= 42 个。不难在电子计算机上用单纯形法解出最优分工协作的生产计划 $z^*_{ci}$ 和流通计划 $x^*_{cij}$。

$x_{cii}$ 为自给自足的产品量，对于 $i \neq j$ 的 $x_{cij}$ 为分工协

作的流量。若经纪人的数量为 $I$，即 $i$，$j$ 的最大值为 $I$，则 $\sum_{c=1}^{2} x_{cij}$ 的数量就是两两经纪人之间都有向对方的流量发生的流量数，它也就是 $I$ 因素 2 组合数的 2 倍，即

$$I(I-1)$$

不过对于最优分工协作计划而言，可能有的 $\sum_{c=1}^{2} x^{*}_{cij}=0$，也就是有的流量为 0 。设线性规划最优解中 $\sum_{c=1}^{2} x^{*}_{cij}=0$ 的个数为 $\xi$，则实际发生的流量 $M^{*}$ 是最大流量数 $I(I-1)$ 与 0 流量数 $\xi$ 之差，即

$$M^{*}=I(I-1)-\xi \qquad (5.3.35)$$

于是从线性规划最优解给出的信息中，我们可解出最优分工度

$$f^{*}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4M^{*}}) \qquad (5.3.36)$$

这种线性规划模型只是上节最优分工度模型的一种近似。它将流通效率 $v$，即流通费用系数 $\mu_{cij}$ 的倒数，视为不变常数，因此不能反映流通效率提高后，对最优分工度 $f^{*}$ 的影响。这种缺陷可以通过参数规划及敏感性分析来改进。当目标函数式（5.3.30）中的流通费用系数 $\mu_{cij}$ 变化时，也就是流通效率 $v_{cij}=\frac{1}{\mu_{cij}}$ 变化时，线性规划的最优解 $x^{*}_{cij}$ 会变化，因而 $\sum_{c} x^{*}_{cij}=0$ 的个数 $\xi$ 亦会变化，而最优流通量数 $M^{*}$ 是经纪人数 $I$ 和 $\xi$ 的函数，最优分工度 $f^{*}$ 又是 $M^{*}$ 的

函数，因此 $f^*$ 也会变化。参数规划和敏感性分析就是研究 $\mu_{cij}$ 等参数变化对最优解 $x^*_{cij}$ 和 $z^*_{ci}$ 的具体影响。这种分析可以定性定量地确定流通效率提高对最优生产计划 $z^*_{ci}$、最优流通计划 $x^*_{cij}$ 的影响，以及对最优分工度 $f^*$ 的影响。

这种线性规划模型假定生产费用系数 $\theta_{ci}$ 为不变常数，我们用参数规划和敏感性分析也无法分析出流通效率 $v_{cij}=\frac{1}{\mu_{cij}}$ 的变化对生产效率 $\frac{1}{\theta_{ci}}$ 的影响，因此，这种模型不能描述流通效率对生产效率的反馈影响这个经济结构问题中的关键。

这种线性规划的另一个缺陷是，它假定工业布局是固定不变的，因而避而不讨论经纪人之间的流通渠道长度问题，而用 $i$ 经纪人到 $j$ 经纪人之间运输单位 $c$ 产品之运费 $\mu_{cij}$ 为一常数这一假定一笔带过。与上节的模型相同，此节的模型不研究需求与价格和收入的关系，而只考虑总需求与分工度等结构变量的关系。

不过这种线性规划模型很容易推广为各种便于应用的形式。

设商品集合为 $C$，则 $c\in C$，经纪人集合为 $I$，则 $i\in I$，$j\in I$，资源集合为 $M$，则 $m\in M$，于是式（5.3.30）至式（5.3.34）中的线性规划模型可推广为更一般的形式。

$$\min: \quad T=C^p+C^t$$
$$=\sum_{c\in C}\sum_{i\in I}\left(\theta_{ci}z_{ci}+\sum_{j\in I}\mu_{cij}x_{cij}\right)$$

服从

$$z_{ci}\geqslant\sum_{j\in I}x_{cij}\quad c\in C,\ i\in I$$

$$\sum_{c \in C} b_{mci} z_{ci} \leqslant k_{mi} \quad m \in M, \quad i \in I \quad (5.3.37)$$

$$\sum_{i \in I} x_{cij} \geqslant d_{cj} \quad c \in C, \quad j \in I$$

$$z_{ci} \geqslant 0, \quad x_{cij} \geqslant 0, \quad c \in C, \quad i, \quad j \in I$$

若用集合符号表示元素的个数，则产品种数为$C$种，经纪人共$I$人，资源共$M$种，于是变量数共有$C \times I + C \times I^2 = CI(I+1)$个，约束条件数为$C \times I + M \times I + C \times I + CI(I+1) = I[M + C(I+1)]$个。

上述模型可以有很多变型，例如把资源分为经纪人自有的劳动、设备和需购进的原料，因而引入原料运费问题，并可以把资源约束对全社会写出，而不分为经纪人写出。

还可以把产品区分为中间产品和最终产品，把中间产品的投入产出引入模型，如此等等。

## §5.4 对偶规划解与分工的人为阻力

利用上节的线性规划，我们可以构造对偶规划问题，用对偶规划可以算出各种资源的影子价格和需求的影子费用。按影子价格和影子费用对资源和产品定价，可以使各经纪人通过分工协作得到尽可能大的好处，因而使各经纪人具有采用最优分工协作计划的动力。如果实际价格背离这种影子价格，则采用最优分工协作计划时，有的经纪人得了很多好处，有的经纪人却比自给自足时减少了收入。在这种情况下，吃亏的人就会拒绝分工协作，而热衷于自给自足，搞小而全、大而全。他作为生产者会对自己的产品惜售，作为买主，他会拒绝购买他人的产品。分工是要各方协作的事，只要有一部分人拒绝协作，则整个社会的分工度就会大大下降。这种

分工的阻力不是运输费用上升引起的，而是由于分工创造的总增值在协作各方分配不公平引起的，它是一种人为的阻力。两个单位即使一墙之隔，运输费用很低，但是如果产品价格不合理，有的人从分工中得到很大好处，有的人在分工中吃了亏，则吃亏的人会拒绝协作，造成很大的流通中的人为阻力。

定义从对偶规划解出的影子价格为**最优协作价格**，则**流通的人为阻力**定义为实际价格与最优协作价格的方差和。设 $c$ 产品的最优协作价格为 $p_c^*$，实际价格为 $p_c$，则流通的人为阻力

$$R=\sum_{c=1}^{C}(p_c-p_c^*)^2 \tag{5.4.1}$$

为了说明影子价格促进分工协作发展的作用，我们举一个简单的最优分工协作线性规划的例子。

假设有两个企业，作为生产者用脚标 $i=1$，2 表示，作为生产资料的需求方用脚标 $j=1$，2 表示。每个企业都可以生产车床和刨床两种产品，并且都要使用这两种产品，分别用脚标 $c=1$，2 代表这两种产品。$i$ 企业生产一台 $c$ 产品的费用为 $\theta_{ci}$，$\theta_{ci}$ 的数值如下表所示。其中 $\theta_{11}=3$ 表示企业 1 生产 1 台车床的费用为 3 万元，$\theta_{21}=1$ 表示企业 1 生产 1 台刨床的费用为 1 万元，余类推。

生产费用系数 $\theta_{ci}$
（万元/台）

| 企业 $i$ \ 产品 $c$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |

将单位 $c$ 产品从 $i$ 厂运往 $j$ 厂的费用 $\mu_{cij}$ 如第 304 页表所示，例如 $\mu_{122}=0$ 表示第 2 个企业自给自足的车床运费为 0，$\mu_{212}=0.5$ 表示从 1 厂运往 2 厂的第 2 种产品每台运费

单位产品运费$\mu_{cij}$（万元/台）

| 产　品　$c$ | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 企业 $i$ ＼ $j$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 0.01 | 0 | 0.05 |
| 2 | 0.01 | 0 | 0.05 | 0 |

0.05万元。

设 $i$ 厂生产的 $c$ 产品量为 $z_{ci}$，若假定没有库存和损耗，$z_{ci}$ 等于从 $i$ 厂运往所有 $j$ 厂的 $c$ 产品总量。设 $i$ 厂运往 $j$ 厂的 $c$ 产品量为 $x_{cij}$，则 $z_{ci}=\sum_{j=1}^{2}x_{cij}$，所以总生产费用可写为

$$C^p=\sum_{c=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\theta_{ci}z_{ci}=\sum_{c=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\theta_{ci}\left(\sum_{j=1}^{2}x_{cij}\right)$$

$$=3(x_{111}+x_{112})+2(x_{121}+x_{122})$$

$$+1(x_{211}+x_{212})+2(x_{221}+x_{222}) \qquad (5.4.2)$$

总运输费用为

$$C^t=\sum_{c=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mu_{cij}x_{cij}$$

$$=0.01(x_{112}+x_{121})+0.05(x_{212}+x_{221}) \qquad (5.4.3)$$

目标函数为生产费用 $C^p$ 与运输费用 $C^t$ 之总和 $T$ 最小化，即

$$
\begin{aligned}
\min: \ T &= C^p + C^t \\
&= 3\,(x_{111}+x_{112}) + 2\,(x_{121}+x_{122}) + 1\,(x_{211} \\
&\quad + x_{212}) + 2\,(x_{221}+x_{222}) + 0.01(x_{112}+x_{121}) \\
&\quad\quad + 0.05(x_{212}+x_{221}) \\
&= 3x_{111} + 3.01x_{112} + 2.01x_{121} + 2x_{122} + x_{211} \\
&\quad + 1.05x_{212} + 2.05x_{221} + 2x_{222} \qquad (5.4.4)
\end{aligned}
$$

设企业 1 对车床与刨床的需求约束分别为

$$
\begin{aligned}
x_{111} + x_{121} &\geqslant 3 \\
x_{211} + x_{221} &\geqslant 2 \qquad (5.4.5)
\end{aligned}
$$

而企业 2 对车床与刨床的需求约束分别为

$$
\begin{aligned}
x_{112} + x_{122} &\geqslant 3 \\
x_{212} + x_{222} &\geqslant 4 \qquad (5.4.6)
\end{aligned}
$$

把目标函数和约束条件的系数整理后可将上述线性规划问题合写为下表。

| | $x_{111}$ | $x_{112}$ | $x_{121}$ | $x_{122}$ | $x_{211}$ | $x_{212}$ | $x_{221}$ | $x_{222}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| min: T | 3 | 3.01 | 2.01 | 2 | 1 | 1.05 | 2.05 | 2 | |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⩾3 |
| 需求约束 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ⩾2 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ⩾3 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ⩾4 |

这个线性规划问题的最优解为

$$
\begin{aligned}
&x^*_{111} = 0,\ x^*_{112} = 0,\ x^*_{121} = 3,\ x^*_{122} = 3 \\
&x^*_{211} = 2,\ x^*_{212} = 4,\ x^*_{221} = 0,\ x^*_{222} = 0 \qquad (5.4.7)
\end{aligned}
$$

也就是说企业 1 专门生产刨床供应两个企业，企业 2 专门生产车床供应两个企业可使生产和运费的总费用最小化。

将上表中的约束条件系数矩阵转置，并构造4个对偶变量 $p_{11}$, $p_{21}$, $p_{12}$, $p_{22}$，我们按第三章§3.8构造对偶规划的方法可以从原规划导出对偶规划。

$$\max:\quad \pi = 3p_{11} + 2p_{21} + 3p_{12} + 4p_{22}$$

服从

$$\begin{array}{lllll}
p_{11} & & & & \leqslant 3 \\
 & & p_{12} & & \leqslant 3.01 \\
p_{11} & & & & \leqslant 2.01 \\
 & & p_{12} & & \leqslant 2 \\
 & p_{21} & & & \leqslant 1 \\
 & & & p_{22} & \leqslant 1.05 \\
 & p_{21} & & & \leqslant 2.05 \\
 & & & p_{22} & \leqslant 2
\end{array} \qquad (5.4.8)$$

上述对偶规划的经济意义可解释如下。分工协作必须进行交换，因此两个厂都既是卖者又是买者。$p_{11}$，$p_{21}$ 分别表示车床和刨床对于1厂的影子价格，$p_{12}$，$p_{22}$ 分别表示车床、刨床对于2厂的影子价格。目标函数等于影子价格乘上各自的需求量，因此就是影子产值了。要求产值最大化意味着全部工厂作为卖者要求产品的总价值最大。

约束条件表示两个厂作为需求方要求选择最高效率的生产者进行交换。例如 $p_{11}$ 是车床对企业1的影子价格，$p_{11}\leqslant 3$ 表示，企业1购买车床时不得高于其自给自足生产的成本。$p_{11}\leqslant 2.01$ 表示对 $p_{11}$ 施以更严格的约束，因为（$2+0.01$）为企业2生产车床的费用加运费，因此企业1应选择效率最高费用最低的交换方案作为 $p_{11}$ 的标准。如果运费为1.1，则购买企业2的车床要求 $p_{11}\leqslant(2+1.1)$，而自己生产的约束是 $p_{11}\leqslant 3$，所以 $p_{11}\leqslant(2+1.1)$ 失效，只有 $p_{11}\leqslant 3$ 起作用。也就是说要求购买车床的影子价格尽量低。其它约束条

件有类似的含义。

利用§3.8的对等定理可从原规划解直接求得对偶规划解：

$$p_{11}^{*}=2.01,\ p_{21}^{*}=1,\ p_{12}^{*}=2,\ p_{22}^{*}=1.05 \quad (5.4.9)$$

$p_{11}^{*}=2.01$ 表示车床对企业1的价格，由于企业2长于生产车床，每台生产费用为2万元，而运给企业1的运费为0.01万元，所以总费用为2.01万元。$p_{12}^{*}=2$ 为企业2生产车床的费用，由于不需要运输，所以它就是车床对企业2的价格。同理，$p_{21}^{*}=1$ 为企业1生产刨床的费用，由于企业1长于生产刨床，所以它也是刨床对企业1的价格，$p_{22}^{*}=1.05$ 为企业2向企业1购买刨床的价格，它是 $p_{21}^{*}$ 与运费0.05之和。

如果企业1自给自足地生产自己所需的3台车床和2台刨床，则它的总经营费用为

$$\theta_{11}d_{11}+\theta_{21}d_{21}=3\times 3+1\times 2=11(\text{万元})$$

按上述最优协作价格进行分工协作生产，其经营费用为

$$2.01\times 3+1\times 2=8.03\ (\text{万元})$$

而企业2自给自足地生产自己所需的3台车床和4台刨床，则其总经营费用为

$$\theta_{12}d_{12}+\theta_{22}d_{22}=2\times 3+2\times 4=14\ (\text{万元})$$

按最优协作价格进行分工协作生产，其经营费用为

$$2\times 3+1.05\times 4=10.2(\text{万元})$$

两厂都通过分工协作降低了经营费用，即增加了净收益。由于对偶规划要求满足约束的条件下总产值最大化，因此也能在最优协作价格的条件下，使协作各方发展分工专业化的动力最大。

如果实际价格不满足约束条件的约束，比如 $p_{11}>3$，则

企业1买车床不如自己造车床，因为企业1自己造车床的费用是3万元，买车床会使他的经营费用高于小而全的经营费用。这时即使最优分工协作计划能使两个企业的总经营成本下降

$$(11+14)-(8.03+10.2)=6.77\text{（万元）}$$

但由于价格不合理，分工的好处完全被企业2独吞，所以企业1会拒绝分工协作而搞小而全。

可见光有最优分工协作计划还不行，还要有最优协作价格，最优分工协作计划才能具有实现的最大动力。

## §5.5 综合考虑最优经济结构和资源最优分配的模型

本节我们将产出 $z$、中间投入 $x$、初始资源 $u$ 及最终需求 $y$ 区别开来。

若有两种产出，两个经纪人，则产出 $z_{ci}$ 表示 $i$ 经纪人生产的 $c$ 种产品，$i=1,\ 2$；$c=1,\ 2$。又假设 $i$ 经纪人生产 $c$ 产品消耗的 $i'$ 经纪人生产的 $c'$ 产品量为 $x_{c'ci'i}$，而 $i$ 经纪人生产 $c$ 产品消耗的 $j$ 处的 $m$ 类资源量为 $u_{mcji}$，若 $m=1,\ 2$，则意味着有两种不同的资源。

第 $i$ 人生产 $c$ 种产品的生产函数为

$$z_{ci}=z_{ci}[(x_{1c1i}+x_{1c2i}),\ (x_{2c1i}+x_{2c2i}),\ (u_{1c1i}+u_{1c2i}),\ (u_{2c1i}+u_{2c2i})]$$

$$c=1,\ 2;\quad i=1,\ 2 \tag{5.5.1}$$

其中 $x_{1c1i}+x_{1c2i}$ 为从1，2两人处输给第 $i$ 人作为中间投入生产 $c$ 产品的第1种产品量，而 $x_{2c1i}+x_{2c2i}$ 为从1，2两人处输给第 $i$ 人作为中间投入生产 $c$ 产品的第2种产品量，$u_{1c1i}+u_{1c2i}$ 为从1，2两个资源供给地输给第 $i$ 人用来生产 $c$ 产品的第1种初始资源，而 $u_{2c1i}+u_{2c2i}$ 为从两个资源供给

地输给第 $i$ 人用来生产第 $c$ 种产品的第 2 种初始资源。

若最终产品量为 $y_{cii'}$，它表示从 $i$ 经纪人输往 $i'$ 经纪人的 $c$ 类最终产品量。而 $y_{ci1}+y_{ci2}$ 为 $i$ 人生产的 $c$ 类最终产品总量。于是物资平衡约束为

$$\sum_{i=1}^{2} z_{ci} = \sum_{i=1}^{2} [(x_{c11i}+x_{c12i}+x_{c21i}+x_{c22i}) + (y_{ci1}+y_{ci2})] \qquad c=1,\ 2 \qquad (5.5.2)$$

其中 $x_{c11i}+x_{c12i}$ 表示从第 1，2 个人处输给第 $i$ 个人用来生产第 1 种产品的 $c$ 类产品量，而 $x_{c21i}+x_{c22i}$ 表示从第 1，2 个人处输给第 $i$ 个人用来生产第 2 种产品的 $c$ 类产品量。第 1 个小括号内表示作为中间投入消耗掉的 $c$ 产品量，而第 2 个小括号内表示最终使用的 $c$ 产品量。等号左边为所有人生产的 $c$ 产品量。上式意为总产量等于中间消耗量加最终产品量。

资源供给约束为

$$\sum_{j=1}^{2} u_{mj} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{c=1}^{2} u_{mcji}, \quad m=1,\ 2 \quad (5.5.3)$$

上式右边表示所有 $j$ 地输给 $i$ 经纪人生产所有 $c$ 种产品消耗的 $m$ 类资源量，而左边表示系统拥有的 $m$ 类资源量。

这个经济系统的总产值为 $c$ 类产出 $\sum_i z_{ci}$ 与相应的产出价格 $p_c$ 之积的总和，即总产值为

$$V = \sum_{c=1}^{2} p_c \left( \sum_{i=1}^{2} z_{ci} \right)$$
$$= p_1(z_{11}+z_{12}) + p_2(z_{21}+z_{22}) \qquad (5.5.4)$$

而生产费用为中间投入费用和初始资源费用之总和。设

$m$类资源的价格为 $\lambda_m$，则生产费用为

$$C^p = \sum_{c'=1}^{2} p_{c'}\left(\sum_{c=1}^{2}\sum_{i'=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} x_{c'ci'i}\right) + \sum_{m=1}^{2}\lambda_m\left(\sum_{c=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} u_{mcji}\right) \qquad (5.5.5)$$

其中 $x_{c'ci'i}$ 表示从 $i'$ 经纪人输给 $i$ 经纪人用来生产 $c$ 产品的 $c'$ 类中间产品，而 $u_{mcji}$ 表示从 $j$ 供应地输给 $i$ 经纪人用来生产 $c$ 类产品的 $m$ 类资源量。

总流通费用是最终产品运输费用、中间产品运输费用和初始资源运输费用之总和。

设将 $c$ 类产品从 $i'$ 人输往 $i$ 人处的单位运费为 $\mu_{ci'i}$，而 $m$ 类资源从 $j$ 供应地输往 $i$ 人处的单位运费为 $\mu_{mji}$，则总运费为

$$C^t = \sum_{c}\sum_{i'}\sum_{i}\mu_{ci'i}y_{ci'i} + \sum_{c'}\sum_{i'}\sum_{i}\mu_{c'i'i}\sum_{c}x_{c'ci'i} + \sum_{m}\sum_{i}\sum_{j}\mu_{mji}\sum_{c}\mu_{mcji} \qquad (5.5.6)$$

于是利润函数为

$$\pi = V - (C^p + C^t) \qquad (5.5.7)$$

约束条件为式（5.5.1)的生产函数，物资平衡约束式(5.5.2)和资源约束式（5.5.3)。

若给定价格 $p_c$，$\lambda_m$ 和资源量我们可以用拉氏乘数法则求解这个最优生产效果问题，解出最优生产计划 $z^*_{ci}$ 和最优流通计划 $y^*_{ci'i}$，$x^*_{c'ci'i}$，$u^*_{mji}$。

如果不知道价格 $p_c$，$p_m$，但只要给出初始资源供应量

和对最终产品 $y_c$ 的需求函数，则我们可以用类似CGE模型的方法求解均衡的产品价格 $p_c^*$ 和资源价格 $p_m^*$。

这种模型可以从最优运输计划算出最优分工度 $f^*$，因而不但求解了资源最优分配问题，同时解出了最优经济结构。

上述模型中令产品种类 $c=1, \cdots, C$，资源种类为 $m=1, \cdots, M$，经纪人数为 $i=1, \cdots, I$，资源供应地为 $j=1, \cdots, J$，则可以推而广之。

这种模型的特点是将中间投入和初始资源写入一个生产函数，它可以是Cobb-Douglas型的，CES型或其它形式的。

另外这种模型变量极多，求解的计算量很大。但是竞争效率很高的市场可以用试销调价的方法近似解出这类最优经济结构和最优资源分配相结合的最优经济效果问题。

这一模型的最大缺陷与上节的线性规划模型类似，即不能将分工度提高和流通效率提高对生产效率的影响包含在模型中。这种模型主要用生产函数的参数表征生产效率。

这种模型也不能解决工业布局的最优集中度问题。下一节我们用一种混合整数规划模型来求解工业布局的最优集中度。

## §5.6 可计算工业布局最优集中度的混合整数规划模型

混合整数规划模型就是将只能取0，1值的整数变量引入一般线性规划模型。这种模型可以化为多个一般线性规划问题用枚举法或分枝定界法求解。

此节我们将设备能力与其他初始资源区别开来，我们用脚标 $c$ 代表商品，但 $c$ 可以属于最终商品，我们用集合 $CF$

表示；$c$ 亦可以属于中间商品，我们用集合 $CI$ 表示；$c$ 还可以属于初级商品即资源，我们用 $CR$ 表示。脚标 $m$ 表示设备的不同种类，$m$ 属于设备种类集合 $M$。

脚标 $i$ 表示待选厂址，$i$ 属于厂址集合 $I$。脚标 $j$ 表示市场，$j$ 属于市场集合 $JF$。$j$ 也可以表示原材料供应地，这时 $j$ 属于供应地集合 $JR$。

这节的模型中由于要考虑厂址选择和工业布局，因此涉及新增企业投资的布局问题。而投资必须考虑将来的后果，这就必须使模型显含时间因素，因此每个变量都增加了时间脚标 $t$，$t$ 属于规划期间 $T$，简记为 $t\in T$。若 $T=10$，则 $t\in T$ 意味着 $t=1$，…，10，若 $T=15$，则 $t\in T$ 表示 $t=1$，…，15。

下面我们首先介绍模型的约束条件。

（ i ）最终产品的物资平衡约束

$$z_{cit}\geqslant\sum_{j\in JF}x_{cijt}\qquad i\in I,\ c\in CF,\ t\in T$$

$$\begin{bmatrix}t\text{ 年 }i\text{ 厂址生产的}\\ \text{最终产品 }c\text{ 的数量}\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}t\text{ 年 }i\text{ 厂址运往所有 }j\\ \text{市场的最终产品 }c\text{ 的数量}\end{bmatrix}\qquad(5.6.1)$$

$z$ 为产量变量，$x$ 为运输量变量，如 $x_{cijt}$ 表示 $t$ 年从 $i$ 厂址输往 $j$ 厂址的 $c$ 产品量。上式中的 $i\in I$，表示 $i$ 脚标代表所有厂址中的任一个。若厂址数有100个，则 $i\in I$ 等价于 $i=1$，2，…，100。$c\in CF$ 表示此处的 $c$ 脚标代表所有最终产品中的任一种。$c\in CI$ 表示此处的脚标 $c$ 代表所有中间产品中的任一种。若有 4 种产品，它们既可以作为最终产

品亦可作为中间产品，则 $c \in CF$ 表示4种产品中作为最终产品部分中的任一种，它等价于 $c=1$，2，3，4并附加了 $c$ 是4种产品中用于最终使用的 $c$ 种产品。这一大串限制条件可以用简略的符号 $c \in CF$ 表示，因此用集合符号有特别简明的特点。$c \in CI$ 表示4种产品中用于中间投入的 $c$ 种产品，相当于 $c=1$，2，3，4加上 $c$ 是 $c$ 产品中用于中间投入部分这一限制条件。$j \in JF$ 表示脚标 $j$ 代表最终产品市场中的任一个。若有10个产品市场，则 $j \in JF$ 等价于 $j=1$，…，10，而 $\sum\limits_{j \in JF}$ 等价于 $\sum\limits_{j=1}^{10}$。若有 $JF$ 个市场，则 $\sum\limits_{j \in JF}$ 等价于 $\sum\limits_{j=1}^{JF}$。用集合符号不但简明，而且有更广泛的适应意义。例如若所有产品有100种，其中有50种既可作为中间产品又可作为最终产品，而30种只能作为中间产品，20种只可以作为最终产品，则 $c \in CF$ 相当于 $c=1$，…，70，$c \in CI$ 相当于 $c=1$，…，80。如果不用集合符号，则写出 $c=1$,…，70或 $c=1$，…,80后还必须用文字写很多附加的说明。若我们借用集合符号表示集合中元素的个数，则 $I$ 可借用来表示待选厂址总数，$CF$ 可以用来表示最终产品种类数，$T$ 可以表示规划的期间的长度。所以式（5.6.1）共有

$$(I \times CF \times T)$$

个约束条件。

（ii）中间产品的物资平衡约束

$$z_{cit} \geqslant \sum_{i' \in I} x_{cii't} \quad c \in CI, \ i \in I, \ t \in T$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年 } i\text{ 厂址生产的} \\ \text{中间产品 } c\text{ 的数量} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} t\text{ 年从 } i\text{ 厂运往所有 } i'\text{ 厂} \\ \text{址的中间产品 } c\text{ 的数量} \end{bmatrix} \qquad (5.6.2)$$

共有（$CI \times I \times T$）个不等式。

若中间产品的投入产出系数为 $a_{cc'i'}$，它表示 $i'$ 厂址生产单位 $c'$ 产品要消耗的中间产品 $c$ 的数量，$c'$ 包括中间产品和最终产品，即产品总类数，用集合符号表为 $c' \in CF \cup CI$，$CF \cup CI$ 表示两个集合的和，即"$CF$ 或 $CI$"。若 $t$ 年 $i'$ 厂址生产的产品总量为 $z_{c'i't}$，则它所需的中间产品 $c$ 的数量为 $a_{cc'i}z_{c'i't}$，而所有 $i$ 厂址向 $i'$ 厂址 $t$ 年提供的中间产品 $c$ 的数量为 $\sum\limits_{i \in I} x_{cii't}$。因此中间产品物资平衡约束还有下式：

$$\sum_{i \in I} x_{cii't} \geqslant \sum_{c' \in CF \cup CI} a_{cc'i'} z_{c'i't} \qquad c \in CI, i \in I, t \in T$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年所有 } i\text{ 厂址输给 } i'\text{ 厂} \\ \text{址的中间产品 } c\text{ 的数量} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} t\text{ 年 } i'\text{ 厂址所需的} \\ \text{中间产品 } c\text{ 的数量} \end{bmatrix} \qquad (5.6.3)$$

共有（$CI \times I \times T$）个不等式。

(iii) 初始资源约束

若 $c \in CR$，$c' \in CF \cup CI$，则 $a_{cc'i}$ 表示 $i$ 厂址生产单位 $c'$ 产品要消耗的初始资源 $c$ 的数量。而 $a_{cc'i}z_{c'it}$ 表示 $i$ 厂址 $t$ 年生产 $c'$ 产品（包括最终产品和中间产品），$z_{c'it}$ 单位所消耗的 $c$ 资源量，引入资源运输变量 $u_{cj'it}$，表示 $t$ 年从 $j'$ 供应地输往 $i$ 厂址的 $c$ 类资源量。而 $\bar{u}_{cj't}$ 为 $t$ 年 $j'$ 供应地 $c$ 类资源可供量，于是资源约束可写为

$$\sum_{c'\in CF\cup CI} a_{cc'i} z_{c'it} \leqslant \sum_{j'\in JR} u_{cj'it} \qquad c\in CR,\ i\in I,\ t\in T$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年 } i\text{ 厂址生产所有产} \\ \text{品消耗的 } c\text{ 类资源量} \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} \text{所有供应地 } t\text{ 年输给} \\ i\text{ 厂址的 } c\text{ 类资源量} \end{bmatrix} \qquad (5.6.4)$$

以及

$$\sum_{i\in I} u_{cj'it} \leqslant \bar{u}_{cj't} \qquad c\in CR,\ j'\in JR,\ t\in T$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年所有 } i\text{ 厂址消耗的 } j' \\ \text{供应地提供的 } c\text{ 资源量} \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} t\text{ 年 } j'\text{ 供应地 } c \\ \text{类资源可供量} \end{bmatrix} \qquad (5.6.5)$$

式（5.6.4）共有不等式（$CR\times I\times T$）个，而式（5.6.5）共有不等式（$CR\times JR\times T$）个。$JR$ 为借用来表示资源供应地个数的供应地集合符号。

（iv）生产能力约束

设 $i$ 厂址初始年已有的 $m$ 类设备能力为 $k_{mi}$，而 $i$ 厂址生产单位 $c$ 类产品要占用的 $m$ 类设备能力为 $b_{mci}$，则 $i$ 厂址 $t$ 年生产 $c$ 类产品 $z_{cit}$ 单位时要占用的 $m$ 类设备为 $b_{mci}z_{cit}$。这里 $c$ 包括最终产品和中间产品，即 $c\in CF\cup CI$。

又设 $\tau$ 年在 $i$ 厂址建成的 $m$ 类设备生产能力为 $h_{mi\tau}$，而 $\tau$ 年 $i$ 厂址报废的 $m$ 类设备能力为 $s_{mi\tau}$，则 $\tau$ 年 $i$ 厂址净增的 $m$ 类设备能力为（$h_{mi\tau}-s_{mi\tau}$）。$h_{mi\tau}$ 是决策变量，我们就是要通过模型求解决定工业布局的最优投资计划 $h^*_{mi\tau}$。从 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 年，累积的净增 $m$ 类设备能力数为 $\sum\limits_{\tau\leqslant t}$（$h_{mi\tau}-s_{mi\tau}$）。这个模型主要是考虑今后投资计划对工业布局。经济结构影响导致的经济效果，所以规划期初的 $t=0$，$\tau$，和 $t$ 都是未来的年数。总计划期为 $T$，$\tau$，$t\in T$。设备种类集合

为$M$，它也可借用来表示设备种类数。于是生产能力约束为

$$\sum_{c\in CF\cup CI} b_{mci}z_{cit}\leqslant k_{mi}+\sum_{\tau\leqslant t}(h_{mi\tau}-s_{mi\tau})\quad \begin{matrix} m\in M,\\ i\in I,\\ t\in T\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年 } i\text{ 厂址生产所有 } c\text{ 产品占用}\\ \text{的 } i\text{ 厂址 } t\text{ 年 } m\text{ 类设备能力}\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix} i\text{ 厂址初始年}\\ m\text{ 设备拥有量}\end{bmatrix}$$

$$+[\text{累积新建能力}]-[\text{累积报废能力}]\tag{5.6.6}$$

上式共有（$M\times I\times T$）个不等式。

（v）需求约束

设$j$市场$t$年对$c$类最终产品需求量为$d_{cjt}$，则需求约束为

$$\sum_{i\in I} x_{cijt}\geqslant d_{cjt}\qquad c\in CF,\ j\in JF,\ t\in T$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年所有 } i\text{ 厂址输往}\\ j\text{ 市场的 } c\text{ 产品量}\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix} t\text{ 年 } j\text{ 市场对}\\ c\text{ 产品的需求量}\end{bmatrix}\tag{5.6.7}$$

上式共有（$CF\times JF\times T$）个不等式。

（vi）投资规模上限约束

$h_{mit}$是$t$年$i$厂址新增的$m$类设备能力，它决定了投资的规模。为了说明投资行为的选择性，我们引入 0-1 整数变量$y_{mit}$。若$y_{mit}=1$，则意味着$t$年$i$厂址新增$m$设备的能力，也就是有投资行为发生。若$y_{mit}=0$，则表示$t$年$i$厂址不新增$m$设备的能力，即没有投资行为发生。乘积$h_{mit}y_{mit}$描述了投资行为的整个特征，$y_{mit}$等于 1 或 0 决定了投资与否，$h_{mit}$的数值决定了投资规模的大小。之所以要这样描述，是为了反映分工发达，生产集中时，投资的规模经济效果。一项投资发生，往往有一笔与投资规模无关的固定费用，它只与是否投资即$y_{mit}$等于 1 还是等于 0 有关，而投资的变动

费用却与新增能力 $h_{mit}$ 的规模有关。所以分工度越高，专业产品生产的集中度越高，则形成单位生产能力所需的投资越少。但是投资的规模因技术限制有一个上极限，设其为 $\bar{h}_{mit}$，则投资规模的技术约束可写为

$$h_{mit} \leqslant \bar{h}_{mit} y_{mit} \qquad m \in M, \ i \in I, \ t \in T$$

〔新增设备能力〕≤〔新增能力上限〕×〔是否投资的 0-1 变量〕

(5.6.8)

上式共有 $(M \times I \times T)$ 个不等式。

(vii) 是否投资的 0-1 变量约束

$$y_{mit} = 0 \text{ 或 } 1 \qquad m \in M, \ i \in I, \ t \in T \qquad (5.6.9)$$

上式共有 $M \times I \times T$ 个可选择等式约束。没有这一约束时，此模型是一般线性规划模型，加上这一整数约束，则模型变为混合整数规划模型。

(viii) 非负约束

$$z_{cit} \geqslant 0 \qquad c \in CF \cup CI, \ i \in I, \ t \in T$$

$$x_{cijt} \geqslant 0 \qquad c \in CF, \ i \in I, \ j \in JF, \ t \in T$$

$$x_{cii't} \geqslant 0 \qquad c \in CI, \ i, i' \in I, \ t \in T$$

$$u_{cj'it} \geqslant 0 \qquad c \in CR, \ j' \in JR, \ i \in I, \ t \in T$$

$$h_{mit} \geqslant 0 \qquad m \in M, \ i \in I, \ t \in T$$

$$y_{mit} \geqslant 0 \qquad m \in M, \ i \in I, \ t \in T \qquad (5.6.10)$$

这里讨论的规划问题显含时间脚标 $t$，所以目标函数要求计划期 $T$ 年内生产费用，投资费用与运输费用总和之现值最小化。设 $t$ 年的生产费用为 $C_t^p$，投资费用为 $C_t^c$，运输费用为 $C_t^t$，则 $t$ 年总经营费用为 $(C_t^p + C_t^c + C_t^t)$。又设

$$\delta_t = (1 + r)^{-t}$$

为 $t$ 年贴现因子，其中 $r$ 为利息率，则 $t$ 年总经营费用贴现值为

$$\delta_t(C_t^p+C_t^c+C_t^t)$$

于是 $t=1$，…，$T$ 年内各年经营费用贴现值的总和就是目标函数，因此模型要求

$$\min: \quad T=\sum_{t\in T}\delta_t(C_t^p+C_t^c+C_t^t) \tag{5.6.11}$$

我们要选择最优的 $z_{cit}$，$x_{cijt}$，$x_{cii't}$，$u_{cj'it}$，$h_{mit}$ 和 $y_{mit}$ 使上列目标函数最小。我们首先看生产费用 $C_t^p$ 与这些决策变量的关系。

设中间产品 $c$ 的价格为 $p_c$，而所有 $i$ 厂消耗的 $c$ 类中间产品为 $\sum_{i\in I}\sum_{c'\in CF\cup CI}a_{cc'i}z_{c'it}$，因此中间产品总费用为

$$\sum_{c\in CI}p_c\left(\sum_{i\in I}\sum_{c'\in CF\cup CI}a_{cc'i}z_{c'it}\right) \tag{5.6.12}$$

又设单位设备能力在 $t$ 年所需的维修运转等费用为 $\beta_{mit}$，则 $t$ 年固定资产的经常性支出为

$$\sum_{i\in I}\sum_{m\in M}\beta_{mit}h_{mit} \tag{5.6.13}$$

若 $c$ 类初始资源价格为 $\lambda_c(c\in CR)$，则 $t$ 年初始资源总费用为

$$\sum_{c\in CR}\lambda_c\left(\sum_{i\in I}\sum_{j'\in JR}u_{cj'it}\right) \tag{5.6.14}$$

于是总生产费用为

$$C_t^p = \sum_{c \in CI} p_c \left( \sum_{i \in I} \sum_{c' \in CF \cup CI} a_{cc'i} z_{c'it} \right) + \sum_{i \in I} \sum_{m \in M} \beta_{mit} h_{mit} + \sum_{c \in CR} \lambda_c \left( \sum_{i \in I} \sum_{j' \in JR} u_{cj'it} \right)$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年总生} \\ \text{产费用} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\text{ 年所有厂址生产所有产} \\ \text{品消耗的中间产品总费用} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\text{ 年所有厂址所有} \\ \text{设备的运行费用} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\text{ 年所有厂址消耗} \\ \text{的所有资源费用} \end{bmatrix} \tag{5.6.15}$$

然后我们再考虑投资费用。

设 $\tau$ 年在 $i$ 厂址对 $m$ 设备进行投资的固定费用为 $\omega_{mi\tau}$，则实际支出的固定费用为

$$\omega_{mi\tau} y_{mi\tau} \tag{5.6.16}$$

若决定新增设备，则 $y_{mi\tau}=1$，实际的固定费用 $\omega_{mi\tau} y_{mi\tau}=\omega_{mi\tau}$，若 $\tau$ 年不扩大 $i$ 厂址的 $m$ 设备能力，则 $y_{mi\tau}=0$，$\omega_{mi\tau} y_{mi\tau}=0$。

与新增能力的规模大小有关的投资变动费用为 $\nu_{mi\tau}$，它表示 $\tau$ 年在 $i$ 厂址新增1单位 $m$ 设备能力的变动费用，于是 $\tau$ 年在 $i$ 厂址增加 $m$ 设备能力 $h_{mi\tau}$ 单位的总投资费用为

$$\omega_{mi\tau} y_\tau + \nu_{mi\tau} h_{mi\tau} \tag{5.6.17}$$

这笔费用以折旧的形式在折旧期限内逐年负担，由于计划期 $T$ 与折旧年限可能不一致，所以不能直接用上式作为计划期的投资费用。

回顾第一章§1.3中的资本还原因子（1.3.8）式，其中资本还原因子为

$$\sigma=\frac{r(1+r)^t}{(1+r)^t-1} \tag{5.6.18}$$

$r$ 为利率，$t$ 为折旧年限。上式表示初始年投资 1 元购买设备，在折旧年限内每年提取折旧 $\sigma$ 元，可以在考虑复利因素的情况下还清投资的本利和。$\sigma$ 相当于 1 元钱投资每年必须偿付的设备价格，也可将其视为设备的年租金。由于各类设备折旧年限不一，我们将折旧年限 $t$ 改写为 $m$ 类设备的折旧年限 $\rho_m$，则 $m$ 类设备的年租金费用系数，即资本还原因子为

$$\sigma_m=\frac{r(1+r)^{\rho_m}}{(1+r)^{\rho_m}-1} \tag{5.6.19}$$

到 $t$ 年为止的投资累积额为

$$\sum_{\tau\leqslant t}\sum_{i\in I}\sum_{m\in M}(\omega_{mi\tau}y_{mi\tau}+\nu_{mi\tau}h_{mi\tau})$$

则这么多投资累积额在 $t$ 年要付的租金就是 $t$ 年的投资费用，即 $t$ 年投资费用为

$$C_t^c=\sum_{\tau\leqslant t}\sum_{i\in I}\sum_{m\in M}\sigma_m(\omega_{mi\tau}y_{mi\tau}+\nu_{mi\tau}h_{mi\tau})$$

$$\begin{bmatrix}t\text{ 年投}\\\text{资费用}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\text{ 年投资}\\\text{固定费用}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t\text{ 年投资}\\\text{变动费用}\end{bmatrix} \tag{5.6.20}$$

而 $t$ 年总运输费用 $C_t^t$ 为最终产品运输费用，中间产品运输费用与初始资源运输费用的总和，即

$$\begin{aligned}C_t^t=&\left(\sum_{c\in CF}\sum_{i\in I}\sum_{j\in JF}\mu_{cijt}x_{cijt}\right)\\&+\left(\sum_{c\in CI}\sum_{i\in I}\sum_{i'\in I}\mu_{cii't}x_{cii't}\right)\\&+\left(\sum_{c\in CR}\sum_{i\in I}\sum_{j'\in JR}\mu_{cj'it}u_{cj'it}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} t\text{ 年总运} \\ \text{输 费 用} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\text{ 年最终产品} \\ \text{的运输费用} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\text{ 年中间产品} \\ \text{的运输费用} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t\text{ 年初始资源} \\ \text{的运输费用} \end{bmatrix} \tag{5.6.21}$$

我们仔细分析，不难发现生产费用，投资费用与流通费用之间是矛盾的。

由于各个厂址生产最终产品和中间产品消耗中间产品系数 $a_{cc'i}(c \in CI)$，资源消耗系数 $a_{cc'i}(c \in CR)$ 及设备占用系数 $b_{mci}$ 不同，也就是生产不同产品的效率不同，因此要生产费用最小，就会要求某些厂址专业生产其效率最高的产品，这就不一定满足使运输费用最小的就近分散生产的目标。也就是说提高分工度使生产费用下降的效果与流通费用上升的后果是矛盾的。

由于各个厂址对 $m$ 设备投资费用参数 $\omega_{mi\tau}$，$\nu_{mi\tau}$ 及设备运转费用参数 $\beta_{mit}$ 不同，加上生产用 $m$ 设备生产 $c$ 产品的占用系数 $b_{mci}$ 不同，即利用各种设备生产不同产品的效率不同，加上规模经济效果因素，最优投资计划应该是发挥优势，各个厂址在自己效率高的产品方面集中大规模投资，形成专业化生产。由于需求有限，一个厂址的投资规模 $h_{mit}$ 大，则其他厂址相应设备的投资规模就小，也就是说规模大等价于专业产品集中生产，分工度高，而规模小，则要满足需求，就要求有很多小厂同时分散生产。可见决策变量 $y_{mit}$ 和 $h_{mit}$ 同时决定系统未来的分工度和工业布局的集中度。

也就是说我们要选择最优分工度 $f^*$ 和最优工业布局的集中度 $G^*$，以使生产费用、投资费用和流通费用之和最小。

工业布局太集中，可以使中间产品的运输费用下降，但

却使初始资源和最终产品的运输费用很高。如前所述，农业和矿山是不能自由布局的，工业布局太集中会使自由布局的企业与分散布局的农业和矿山之间的距离加大。另外集中投资建大规模的厂虽可以提高分工度，但却使利息费用比分阶段建小厂大得多。因此上述混合整数规划问题就是要综合考虑这些互相矛盾的目标，求解最优生产计划 $z^*_{cit}$，最优流通计划 $x^*_{cijt}$ 和 $x^*_{cj'it}$ 以及最优投资计划 $y^*_{mit}$，$h^*_{mit}$，以使总经营费用最小。由于以上决策变量中的 $x^*_{cijt}$，$x^*_{cj'it}$ 决定最优流量数 $M^*_t$，因而决定最优分工度 $f^*_t$，而 $y^*_{mit}$ 和 $h^*_{mit}$ 对 $t$ 年后的 $x^*_{cijt}$ 有重大影响，并且决定了工业布局的集中度 $G^*$，所以它们也与 $x^*_{cijt}$，$x^*_{cj'it}$ 一块决定最优分工度 $f^*_t$。由于此模型的变量都有时间脚标 $t$，所以可解出动态最优分工度 $f^*_t$ 和动态工业布局集中度 $G^*_t$。

不过此模型没有显含分工度 $f^*_t$ 和工业布局集中度 $G^*_t$ 反过来对投资效果和生产效率、运输效率的影响。不过只要将反映投资效率的参数 $\omega_{mi\tau}$，$\nu_{mi\tau}$ 与分工度 $f^*_t$ 的关系找出来就能解决这一问题，这时模型就不是线性的。反映生产效率的参数 $a_{cc'i}$（中间产品消耗系数和资源消耗系数），$\beta_{mit}$（设备运转费用系数），$b_{mci}$（设备占用系数）也都可以加上时间脚标 $t$ 与当时的分工度 $f^*_t$ 挂上勾，则可以反映分工度对生产效率的影响。同样流通效率参数 $\mu_{cijt}$ 与分工度 $f^*_t$ 也有关。比如流通的专业化水平提高，各种专用车辆、设备的出现，特别是港口、车站、机场等分工度的提高可以使流通效率 $v_{cijt}=\frac{1}{\mu_{cijt}}$ 大大提高。不过把这些反馈影响全纳入模型，从技术上来说，目前还不能求解。

上述线性的混合整数规划模型由于引入了 0-1 整数变量

$y_{mit}$，求解亦十分困难，主要是计算量太大。

一种解法是枚举法。设 $y_{mit}$ 中的 $m=1, 2$；$i=1, 2$；$t=1, 2$，则所有 $y$ 为

$$y_{111},\ y_{112},\ y_{121},\ y_{122},\ y_{211},\ y_{212},\ y_{221},\ y_{222}$$

这些 $y_{mit}$ 都可以取 0，1 两个值，且只能取 0，1 两个值，于是所有 $y$ 取可能值的方案就是 2 因素的 8 次可重复排列，即共有 $2^8=256$ 种可能的方案，如

1 0 0 0 0 0 0 0

0 1 1 0 0 0 0 0

1 0 0 1 0 1 0 0

……………………

将每一种可能方案中 $y_{mit}$ 的具体数值代入模型，则得到一个普通线性规划问题，首先看这一组 $y_{mit}$ 是不是可行解，即是否与约束条件矛盾，例如 $y_{111}=1$，$y_{112}$，$y_{121}$，$y_{122}$，$y_{211}$，$y_{212}$，$y_{221}$，$y_{222}=0$，这一方案因不能满足需求而不可行。对于可行的方案再求解普通线性规划问题，算出其最小总经营费用，然后再与其它可行的 $y_{mit}$ 方案得出的最小总经营费用比较，其中与费用最小相对应的一组 $y_{mit}$ 就是最优投资方案。

这要求解很多普通线性规划问题，即使计算机用单纯形法求解线性规划速度很快，但计算量也大得惊人。

实际应用中效率最高的算法是所谓分枝定界法。假设有三个 $y$，则我们有下列分枝树，这个树分三层，第一层右边的分枝表示 $y_1=1$，左边的分枝表示 $y_1=0$；第二层右边的分枝表示 $y_2=1$，左边的分枝表示 $y_2=0$；第三层右边的分枝表示 $y_3=1$，左边的分枝表示 $y_3=0$。三层合起来构成 8 个分枝，一个分枝是 $y$ 的一组方案，例如最右边一个分

枝表示 $y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=1$。右手第 2 个分枝表示 $y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=0$。图 5.2 各分枝的方案如下所示，最右

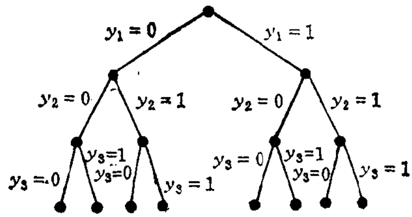



图 5.2

一列相当于图中最右边的分枝：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
y_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
y_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

计算首先从树根开始。这时令所有 $y$ 满足

$$0 \leqslant y_i \leqslant 1$$

即放松整数约束条件式 (5.6.9)，于是混合整数规划变成一个普通线性规划问题，求出最小总费用设为 $T=80$。这就是图 5.3 中结点 0 的计算结果。在结点 1，我们令 $y_1=1$，$y_2$

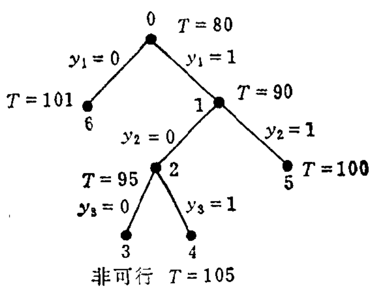



图 5.3

和 $y_3$ 仍在 0 与 1 之间任意取值，又可解出一个普通线性规划，其最小总费用 $T=90$。在结点 2，我们令 $y_1=1$，$y_2=0$，$y_3$ 在 0 与 1 之间任意取值，又可解出线性规划的 $T=95$。在第 3 个结点，我们令 $y_1=1$，$y_2=0$，$y_3=0$，由于不满足需求约束，此方案不可行。然后我们回溯到结点 2，再沿另一分枝计算结点 4，在结点 4 处 $y_1=1$，$y_2=0$，$y_3=1$，这一方案满足所有约束条件，是可行的，算出普通线性规划目标函数 $T=105$。它高于结点 1 的 $T=90$，因此我们再回溯到结点 1，沿另一分枝向下计算结点 5，这时令 $y_1=1$，$y_2=1$，$y_3$在 0 与 1 之间任意取值，解这一线性规划问题，求得的最优 $y_3^*=0$ 正好是整数，算出 $T=100$。我们再来计算第一层左边的分枝，即结点 6，这时令 $y_1=0$，$y_2$ 与 $y_3$ 在 0 与 1 之间任意取值，解得 $T=101$。这比结点 5 施以整数约束的最小费用 $T=100$ 大，这就是说结点 6 下面的结点，由于逐步加上 $y_2$，$y_3$ 必须为整数的约束，所以约束越来越苛刻，总费用也只会大于 $T=101$，而不会下降。所以可以断定结点 6 以下的结点都不会优于结点 5，我们就可以停止计算，而取结点 5 的方案，即 $y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=0$ 为最优解。

从上述分析可以看出结点 4 的 $T=105$ 是第一次计算的界限，如果有哪个放松整数约束的结点的 $T$ 大于这一界限，则可以将这些结点排除，而 $T$ 小于这一界限的结点必须进一步计算。由于已算过的所有结点之 $T$ 都小于105，所以结点4算出的第一组可行解不能起到排除结点的作用。于是我们沿另外的分枝找到第 2 组可行解，这就是结点 5 的方案，$y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=0$，相应的 $T=100$ 成为第二个界限，由于结点 6 的 $T=101$ 大于这一界限，结点 4 的 $T=105$ 亦大于这

一界限，因此这些结点及其下面的所有分枝和结点都可以排除不再计算。如果 $y$ 变量很多，则我们可以在其它未被排除的分枝和结点上再搜寻可行解，算出相应的 $T$，若它低于上轮计算中的界限，则以它为新的界限，又排除一批 $T$ 高于它的结点和分枝，这样就可以大大减少计算量。

混合整数规划模型主要的难点并不在数学方面，而在于计算量太大，必须在计算机程序等计算方法方面施以技巧。

这种混合整数规划模型还可以加进对外贸易因素。由于集中投资建分工度高的大厂，不但利息费用高，产品原料运费高，而且会使大厂投产后出现供应的跳跃性变化。由于需求一般是均匀渐增的，所以这种供给的跃增会使大厂投产前供不应求，投产后供过于求。供不应求时需要从国外进口，供过于求时需向国外出口。而分散分阶段建小厂，就不会出现这种矛盾。我们可以把进出口贸易的费用和收入引进模型，因而使模型隐含最优国际分工结构问题。在这类模型中，工业集中布局，提高分工度的好处必须大于流通费用上升，利息费用上升和进出口费用上升的坏处，提高分工度和工业布局集中度才有利可图，模型可解出最优经济分工度和最优投资计划决定的工业布局的最优集中度。

细心的读者可能注意到此节的模型中隐含分工协作的投入产出关系，因此某种投资规模扩大，分工度提高，布局集中度提高造成的对中间产品需求的批量增大，因而使中间产品生产能力扩大的规模经济效果显著，这种大规模集中投资的间接好处是很难从一个项目的投资经济效果分析看出来的。但却可以用这类复杂的模型计算出来。

# 第六章 经济体制和竞争效率对经济效果的影响

## §6.1 独家经营企业追求其最优经济效果的一般规律

前几章我们假定任何生产者和消费者都不能垄断市场和操纵价格，这时通过试错调价可以由市场或计划机关求得均衡价格和均衡供求量。如果企业没有自主权，他就不会有追求生产者最优经济效果的动力，那么我们所讲的种种最优经济效果都是一纸空文。如果扩大了企业自主权，企业有了权责利，他就会追求最大利润。但是如果体制不合理，竞争效率不高，那么企业利润最大化不一定与消费者效用最大化协调。有时扩大企业自主权后，由于竞争效率不高，体制不合理，反而出现了企业利用其垄断地位损害消费者利益，用垄断利润掩盖经营不善等情况，结果扩大企业自主权反而加剧了企业利益与消费者利益的矛盾。为什么会出现这种问题呢？在什么情况下扩大企业自主权才能使生产者利润最大化与消费者效用最大化不矛盾呢？不同体制下生产者最优经济效果与消费者最优经济效果关系怎样呢？这几节我们就来讨论这些问题。

如果企业对某种商品的生产或售卖处于独家经营的地位，则扩大企业自主权后，企业可以自己调节价格，或通过控制供应量来操纵价格。这就与前几章中企业只能将价格当作

常数来接受大不相同了，这时价格不再是常数而是变量。

设价格是销售量 $x$ 的函数

$$p = f(x) \tag{6.1.1}$$

其中 $x$ 为销售量，$p$ 是价格。销量越大，则价格要越低才能销得动，即

$$f'(x) < 0 \tag{6.1.2}$$

价格 $p$ 与销量 $x$ 之积为销售收益，设为 $R$，则

$$R = px = xf(x) \tag{6.1.3}$$

又设生产总费用函数为

$$C = C(x) \tag{6.1.4}$$

则利润为

$$\pi = R - C \tag{6.1.5}$$

利润最大化的条件为

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

即

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx} \tag{6.1.6}$$

此式意味着最优经济效果的条件是边际收益等于边际费用。

由于 $R = px$，且 $p$ 为 $x$ 的函数，是可控变量，所以

$$\frac{dR}{dx} = p + \frac{dp}{dx}x \tag{6.1.7}$$

令独家经营的利润最大化价格为 $p_1$，则将式（6.1.7）代入式（6.1.6），我们有

$$p_1 = -\frac{dp}{dx}x + \frac{dc}{dx} \tag{6.1.8}$$

在有效率竞争的条件下，任何企业生产的产品占社会上此种产品总供应量的比例极小，因此增减产量不能影响市场价格波动，企业只能接受市场价格，这时价格 $p$ 为常数。利润最大化的条件为价格等于边际费用。设有效率竞争的价格为$p_2$，则利润最大化的条件为

$$p_2=\frac{dC}{dx} \tag{6.1.9}$$

由于需求函数的负数特性，所以$\frac{dp}{dx}<0$，$-\frac{dp}{dx}>0$，$p_1$等于$\frac{dC}{dx}$加上一个正数，$p_2$等于$\frac{dC}{dx}$，所以

$$p_1>p_2 \tag{6.1.10}$$

即独家经营时，企业要使其利润最大化，就必须将其价格定得比有效率竞争的市场价格高。由于需求函数的负数特性，所以价格高了，利润最大化的独家经营产量 $x_1$ 也会低于有效率竞争时企业利润最大化的产量 $x_2$。

我们在一般均衡理论中证明了有效率竞争下生产者利润最大化与消费者效用最大化一致，有效率竞争的供求均衡就是 Pareto 最优境界。在独家经营时也能达到供求均衡，但其价格高些，产量低些，这种均衡满足生产者利润最大化，但不是 Pareto 最优境界。生产者利润最大化与消费者效用最大化有矛盾。在某种产品独家经营时，扩大企业自主权往往使消费者吃亏。生产者会使用各种手段变相提价，并不愿多生产，因为这样可以使其利润最大化。

可见个别企业垄断市场是生产者不能全心全意为消费者服务的根源之一，是生产者利润最大化与满足人民需要相矛盾的根源之一。

“小智善于治事，大智善于治人，睿智善于立法”，要解决生产者为人民服务的原动力问题，不但要完善企业责任制，而且必须用立法行为限制独家经营和价格垄断。保证竞争的效率高。例如日本的平等竞争法就是经济迅速发展的原动力之一。

在体制改革中要注意区别独家经营和竞争效率较高的不同产品。例如电风扇的生产处于有效率竞争的状况，降价的压力很大，价格制定权就可以下放，下放了只有好处，没有坏处，它只会刺激降价不会引起提价。但有些产品是独家经营的，或少数几家企业垄断了市场，对这些商品就不能轻易下放制定价格的权力，而要经过体制改革或其它立法行为扭转独家经营的局面。

## §6.2 垄断对实现Pareto最优境界的干扰

我们在上几章介绍了，当资源分配达到综合最优经济效果即 Pareto 最优境界时，消费者选择不同商品的边际替代率等于生产者生产不同商品的边际转换率。实现这种综合最优经济效果的条件为有效率的竞争。从上节的讨论可以看出，竞争效率不高肯定对实现综合最优经济效果有很大干扰，本节就是定性地分析这种干扰。

假设生产 $y_1$，$y_2$两种产品都要用一种资源 $x$。产品$y_1$由$A$公司独家经营，而 $y_2$ 由众多的企业生产，这些企业互相进行有效率的平等竞争。两种产品的生产者在购买资源 $x$ 的市场上都面临着有效率竞争，所以他们都必须将 $x$ 的价格 $p$ 当作给定常数来加以接受。

设$A$公司消耗的资源量为$x_1$，其价格为 $p$，产出量为$y_1$，其价格为 $r_1$，利润为

$$\pi_1 = r_1 y_1 - p x_1 \tag{6.2.1}$$

利润最大化的条件为

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = r_1 \frac{dy_1}{dx_1} + y_1 \frac{dr_1}{dy_1} \frac{dy_1}{dx_1} - p = 0$$

即

$$\left(r_1 + y_1 \frac{dr_1}{dy_1}\right)\frac{dy_1}{dx_1} = p \tag{6.2.2}$$

括号中的式子表示产出的边际收益，而$\frac{dy_1}{dx_1}$表示资源的边际产出，所以等号左边为资源的边际产出之边际价值。因此在这种竞争效率不高的情况下，企业利润最大化的条件为，资源的边际产出之边际价值等于资源价格。

$y_2$产品的生产者在资源市场和产出商品市场上都面临着有效率竞争，所以不但资源价格$p$，而且$y_2$之价格$r_2$对于他们来说都是只能当作给定常数加以接受的量。根据第三章生产者在有效率竞争下最优经济效果的条件式（3.5.3）和（3.5.4），生产者利润最大化要求资源之边际产值等于资源价格。设这些企业消耗的资源量为$x_2$，则

$$r_2 \frac{dy_2}{dx_2} = p \tag{6.2.3}$$

联立式（6.2.2）和（6.2.3），我们有

$$\left(r_1 + y_1 \frac{dr_1}{dy_1}\right)\frac{dy_1}{dx_1} = r_2 \frac{dy_2}{dx_2} \tag{6.2.4}$$

由于需求函数的负数特性，即$\frac{dr_1}{dy_1} < 0$，所以上式意味着

$$r_1\frac{dy_1}{dx_1}-r_2\frac{dy_2}{dx_2}=-y_1\frac{dr_1}{dy_1}\quad\frac{dy_1}{dx_1}>0$$

即

$$r_1\frac{dy_1}{dx_1}>r_2\frac{dy_2}{dx_2}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}\quad\frac{dx_2}{dy_2}>\frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{dy_1}{dy_2}\quad\frac{dx_2}{dx_1}>\frac{r_2}{r_1}\tag{6.2.5}$$

因为资源总量有限，所以

$$x=x_1+x_2\tag{6.2.6}$$

为常数，因此

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-1\tag{6.2.7}$$

将上式代入式（6.2.5)，于是

$$-\frac{dy_1}{dy_2}>\frac{r_2}{r_1}\tag{6.2.8}$$

不等号左边就是生产者用一种资源生产不同产品的边际转换率。也就是说在竞争效率不高时，企业追求本身最大利润的结果使资源分配造成产出的边际转换率大于产出价格比。

由于 $y_1$，$y_2$ 对于消费者是消费投入，所以 $-\dfrac{dy_1}{dy_2}$ 对于消费者来说就是边际替代率。现以 $\left(-\dfrac{dy_1}{dy_2}\right)'$ 表之，又根据第二章的讨论，消费者最优经济效果的条件为边际替代率等于价格比，即

$$\left(-\frac{dy_1}{dy_2}\right)'=\frac{r_2}{r_1}$$

根据第四章的讨论，达到生产者和消费者综合最优经济效果的条件为产品对生产者的边际转换率等于产品对消费者的边际替代率，即

$$-\frac{dy_1}{dy_2}=\left(-\frac{dy_1}{dy_2}\right)'=\frac{r_2}{r_1} \tag{6.2.9}$$

式（6.2.9）与式（6.2.8）不一致，这就证明了竞争效率不高，存在独家经营状态时，不可能达到生产者和消费者的综合最优经济效果，即资源分配不能达到 Pareto 最优境界。

Pareto最优境界意味着资源分配已达到生产者和所有消费者的综合最优经济效果，若改变这种资源分配方案，不是损己利人，就要损人利己，总之会使社会总福利减少。未达到这种最优状态时，我们总可以适当地改变资源分配方案，使综合经济效果进一步提高，使所有人的生活水平都能提高（至少不降低）。这两节的分析证明了垄断使经济系统不能达到 Pareto 最优，也就是说还可以改变资源分配，进一步提高综合经济效果。方法主要是提高竞争效率。

## §6.3 二元竞争的古诺模型

某种商品的市场上有两个企业$A$和$B$互相竞争，他们都有制定价格的权力，并能通过调节产量影响此种商品的价格。设$x_1$为$A$企业对此种商品的供给量，$x_2$为$B$企业对此种商品的供给量，总供给量为$x$，则

$$x=x_1+x_2 \tag{6.3.1}$$

此种商品的需求函数为

$$p=f(x),\quad f'(x)<0 \tag{6.3.2}$$

设$A$企业的费用函数为

$$C_1=C_1(x_1) \tag{6.3.3}$$

相应的利润函数为

$$\pi_1 = px_1 - C_1(x_1) = x_1 f(x_1) - C_1(x_1) \tag{6.3.4}$$

又设$B$企业的费用函数为

$$C_2 = C_2(x_2) \tag{6.3.5}$$

相应的利润函数为

$$\pi_2 = px_2 - C_2(x_2) = x_2 f(x_2) - C_2(x_2) \tag{6.3.6}$$

$A$企业利润最大化的条件为

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = p + x_1 \frac{dp}{dx_1} - \frac{dC_1}{dx_1} = 0$$

即

$$f(x) + x_1 \frac{df}{dx} \frac{dx}{dx_1} - C_1'(x_1) = 0 \tag{6.3.7}$$

由于

$$x = x_1 + x_2$$

所以

$$\frac{dx}{dx_1} = 1 + \frac{dx_2}{dx_1}, \quad \frac{dx}{dx_2} = 1 + \frac{dx_1}{dx_2} \tag{6.3.8}$$

代入式（6.3.7），则

$$f(x) + x_1 f'(x)\left(1 + \frac{dx_2}{dx_1}\right) - C_1'(x_1) = 0 \tag{6.3.9}$$

$B$企业利润最大化的条件为

$$\frac{d\pi_2}{dx_2} = p + x_2 \frac{dp}{dx_2} - \frac{dC_2}{dx_2} = 0$$

即

$$f(x) + x_2 \frac{df}{dx} \frac{dx}{dx_2} - C_2'(x_2) = 0 \tag{6.3.10}$$

将式（6.3.8）中的 $\frac{dx}{dx_2}=1+\frac{dx_1}{dx_2}$ 代入上式，则

$$f(x)+x_2f'(x)\left(1+\frac{dx_1}{dx_2}\right)-C_2'(x_2)=0 \qquad (6.3.11)$$

$\frac{dx_2}{dx_1}$和$\frac{dx_1}{dx_2}$叫$A$，$B$企业的猜测变动。表示一个企业产量变化后，对方亦会采取对策，调节他的产量，以保持利润最大化。以上模型叫二元竞争的古诺模型。古诺假定$A$，$B$二企业的猜测变动都等于0，也就是双方都假定对方保持目前的产出水平，然后调节自身的产出，以使利润最大化。而一旦$A$达到了这一水准，则$B$又假设$A$保持其产出量不变，而调节他的产量，以使其利润最大化。他的产量稳定后，$A$又以$B$的既定产出量为标准，调节产量使利润最大化，这样经过多次反复调节，就会收敛于一个均衡的最优状态。在猜测变动$\frac{dx_2}{dx_1}=0$，$\frac{dx_1}{dx_2}=0$的情况下，式（6.3.9），(6.3.11)变成

$$f(x)+x_1f'(x)-C'(x_1)=0 \qquad (6.3.12)$$

$$f(x)+x_2f'(x)-C_2'(x_2)=0 \qquad (6.3.13)$$

两式中的$x=x_1+x_2$，所以两式中都只有$x_1$，$x_2$两个变量，因此可以改写成显函数形式，可写成

$$x_1=\psi_1(x_2) \qquad (6.3.14)$$

$$x_2=\psi_2(x_1) \qquad (6.3.15)$$

式（6.3.14）叫$A$企业的反应函数，即$A$企业的最优产量$x_1$是$B$企业产量$x_2$的函数，式（6.3.15）叫$B$企业的反应函数，即$B$企业利润最大化的产量$x_2$是$A$企业产量$x_1$的函数。反应函数说明了竞争时的最优经济效果是个对策问题，没有一成不变的最优，每个企业的最优产量随其它企业的对策而

变化。联立式（6.3.14）和式（6.3.15）可解出$A$，$B$两企业的均衡产量$x_1^*$，$x_2^*$，然后求出总均衡产量$x^*=x_1^*+x_2^*$。代入需求函数就可求得均衡价格$p^*$。

例如，设市场需求函数为

$$p=a-bx \qquad a,\ b>0 \tag{6.3.16}$$

$A$企业的费用函数为

$$C_1=v_1x_1+A_1 \qquad v_1,\ A_1>0 \tag{6.3.17}$$

$B$企业的费用函数为

$$C_2=v_2x_2+A_2 \qquad v_2,\ A_2>0 \tag{6.3.18}$$

于是$A$企业利润最大化的条件（6.3.12）式变成

$$a-b(x_1+x_2)-bx_1-v_1=0$$

即

$$x_1=\frac{a-v_1}{2b}-\frac{x_2}{2} \tag{6.3.19}$$

这就是$A$企业的反应方程（6.3.14）式。

$B$企业利润最大化的条件（6.3.13）式变成

$$a-b(x_1+x_2)-bx_2-v_2=0$$

即

$$x_2=\frac{a-v_2}{2b}-\frac{x_1}{2} \tag{6.3.20}$$

这就是$B$企业的反应方程（6.3.15）式。

联立式（6.3.19）和式（6.3.20），解出$A$，$B$企业的均衡产量分别为

$$x_1^*=\frac{a-2v_1+v_2}{3b} \tag{6.3.21}$$

$$x_2^*=\frac{a-2v_2+v_1}{3b} \tag{6.3.22}$$

总的均衡产量

$$x^* = x_1^* + x_2^* = \frac{2a - v_1 - v_2}{3b} \quad (6.3.23)$$

均衡价格为

$$p^* = a - bx^* = \frac{1}{3}(a + v_1 + v_2) \quad (6.3.24)$$

若两企业的边际费用 $v_1 = v_2 = v$，则最优产量变成 $x^* = \frac{2}{3b}(a - v)$，最优价格变成 $p^* = \frac{1}{3}(a + 2v)$。

如果此种产品独家经营，生产技术条件与上述情况相同，则边际费用仍为 $v$，则利润最大化的条件为边际收益等于边际费用 $\frac{dC}{dx} = v$。

由于需求函数为 $p = a - bx$，所以边际收益为

$$\frac{dpx}{dx} = p + \frac{dp}{dx}x = a - bx - bx = a - 2bx \quad (6.3.25)$$

令它等于边际费用 $v$，则

$$a - 2bx = v \quad (6.3.26)$$

解出独家经营时利润最大化均衡产量为

$$x^* = \frac{a - v}{2b} \quad (6.3.27)$$

而二元竞争的均衡产量为

$$x^* = \frac{2}{3} \cdot \frac{a - v}{b} \quad (6.3.28)$$

由于 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$，$\therefore \frac{2}{3}\ \frac{a - v}{b} > \frac{1}{2}\ \frac{a - v}{b}$

也就是说二元竞争时的利润最大化产量高于独家经营的利润

最大化产量。根据需求函数的负数特性可以判断，由于产量高，因而销量亦要高（否则造成积压），所以二元竞争时的均衡价格低于独家经营时的均衡价格。

我们在第三章证明了有效率竞争条件下的均衡价格等于边际费用，即

$$p = v \tag{6.3.29}$$

将需求函数$p = a - bx$代入，则

$$a - bx = v$$

$$x^* = \frac{a - v}{b} \tag{6.3.30}$$

这是有效率竞争的最优产量，由于

$$\frac{a - v}{b} > \frac{2}{3} \cdot \frac{a - v}{b} > \frac{1}{2} \cdot \frac{a - v}{b} \tag{6.3.31}$$

所以有效率竞争时企业利润最大化产量大于二元竞争时企业利润最大化产量，更大于独家经营时企业利润最大化产量。根据需求函数的负数特性易知有效率竞争的最优价格低于二元竞争和独家经营时供求均衡的价格。

以上证明不难推广到各种不同形式的需求函数和费用函数。

于是我们区别了不同的均衡概念和不同的生产者最优经济效果概念。在不同的体制下，供求均衡和生产者利润最大化的效果是大不一样的。在有效率竞争条件下，供求均衡和生产者利润最大化满足 Pareto 最优，即能达到全社会综合最优经济效果，所有人的效用都能最大化。而在竞争效率不高或独家经营时，供求均衡并不一定意味着达到了综合最优经济效果，也就是说还有提高总体经济效果的潜力可挖。这

时生产者利润最大化要以牺牲消费者的一部分利益为代价，也就是说不能用有限的资源使所有人的总效用最大化。

这方面的研究已由数理经济学大师，现代电子计算机之父冯·诺依曼发展了一门专门的数理经济学领域，即对策论，其中详细研究二元、三元以至多元竞争，以及合伙竞争、对抗性竞争（0和竞争）、非对抗性竞争（非0和竞争）、交涉对策等等。

**例** 洗衣机需求函数为

$$x = Ap^{a} \qquad (6.3.32)$$

其中 $a = -6.68$ 为价格弹性，$A = 3\times 10^{19}$为回归出来的参数，$x$为每月需求量，$p$为价格。

甲洗衣机厂的费用函数为

$$C_1 = 28986 + 168x_1$$

$C$为每月总生产费用，$x_1$为月生产量。这可以写为简约的代数式

$$C_1 = v_1x_1 + A_1 \qquad (6.3.33)$$

乙洗衣机厂生产费用函数为

$$C_2 = v_2x_2 + A_2 \qquad (6.3.34)$$

其中 $v_2 = 160$，$A_2 = 21000$

若两厂是洗衣机的主要厂家，他们可以制定价格和操纵市场。则根据古诺模型，均衡的条件为

$$\left.\begin{aligned} p + x_1\frac{dp}{dx} - \frac{dC_1}{dx_1} = 0 \\ p + x_2\frac{dp}{dx} - \frac{dC_2}{dx_2} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.3.35)$$

上式可改写为

$$p + x_1 \frac{1}{\frac{dx}{dp}} = \frac{dC_1}{dx_1}$$

(6.3.36)

$$p + x_2 \frac{1}{\frac{dx}{dp}} = \frac{dC_2}{dx_2}$$

因为$\frac{dC_1}{dx_1} = v_1$，$\frac{dC_2}{dx_2} = v_2$，$\frac{dx}{dp} = aAp^{a-1}$，所以上式为

$$p + \frac{x_1}{aAp^{a-1}} = v_1$$

(6.3.37)

$$p + \frac{x_2}{aAp^{a-1}} = v_2$$

将 $x_1 = x - x_2$ 及 $x = Ap^a$代入上式，则

$$p + \frac{1}{a} p - \frac{1}{aA} x_2 p^{1-a} = v_1$$

(6.3.38)

$$p + \frac{1}{aA} x_2 p^{1-a} = v_2$$

联立上两式，可解出

$$x_2 = \frac{aA}{2}\left( v_2 - v_1 + \frac{1}{a} p \right) p^{a-1} \qquad (6.3.39)$$

代回式（6.3.37）中的第 2 个方程得到

$$p + \frac{1}{2}\left( v_2 - v_1 + \frac{1}{a} p \right) = v_2 \qquad (6.3.40)$$

从中解出均衡价格

$$p^* = \frac{a\ (v_1 + v_2)}{2a + 1} \qquad (6.3.41)$$

代回需求函数（6.3.32）可得均衡产量，

$$x^*=A\left[\frac{a\ (v_1+v_2)}{2a+1}\right]^a \qquad (6.3.42)$$

将 $v_1=168$，$v_2=160$，$a=-6.68$，$A=3\times10^{19}$ 代入上两式算出

$$p^*=177,\quad x^*=28360 \qquad (6.3.43)$$

将 $p^*$ 代入式（6.3.39）可算出乙洗衣机厂均衡产量

$$x_2^*=18600 \qquad (6.3.44)$$

而甲洗衣机厂均衡产量为每月

$$x_1^*=x^*-x_2^*=9700\text{台} \qquad (6.3.45)$$

如果甲洗衣机厂和乙洗衣机厂联合起来垄断市场，因而处于独家经营地位，则利润最大化条件为边际收益等于边际成本 $v$，即

$$\frac{dpx}{dx}=p+x\frac{dp}{dx}=v \qquad (6.3.46)$$

由于

$$p=\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{a}},\qquad x=Ap^a \qquad (6.3.47)$$

所以

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{aA}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{a}-1} \qquad (6.3.48)$$

代入式（6.3.46），则得到

$$p+Ap^a\frac{1}{aA}\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{a}-1}=v$$

$$p+\frac{1}{a}p^{a}\left(\frac{Ap^{a}}{A}\right)^{\frac{1}{a}-1}=v$$

即

$$p^{*}=\frac{av}{a+1} \tag{6.3.49}$$

令两厂联合生产的边际成本为 $v_1$ 与 $v_2$ 的平均值，即 $v=\frac{168+160}{2}=164$。然后与 $a=-6.68$ 一块代入上式，可算出垄断市场时利润最大化的价格

$$p^{*}=\frac{-6.68\times 164}{-6.68+1}=193 \tag{6.3.50}$$

将这个价格代入需求函数，则可算出垄断时的均衡供求量

$$x^{*}=Ap^{*a}=16200 \tag{6.3.51}$$

它比二元竞争时的均衡产量 28300 少得多。相应的价格也比二元竞争时的均衡价格 177 高得多。

如果处于有效率的竞争，并设洗衣机生产总的边际成本仍为 $v=164$，则利润最大化的条件为价格等于边际成本 $v$，即

$$p^{*}=v=164 \tag{6.3.52}$$

将 $p^{*}=164$ 代入需求函数可解出利润最大化的最优产量

$$x^{*}=Ap^{*a}=3\times 10^{19}\times 164^{-6.68}$$
$$=48000 \tag{6.3.53}$$

几乎是二元竞争时均衡产量的 2 倍，价格也比二元竞争时低 (177－164)＝13元。

这就是体制改革提高经济效果的潜力，实际上洗衣机厂目前正面临洗衣机买方市场，全国共有 300 家洗衣机厂竞争。但与有效率竞争的水平相差还有一段距离，因此洗衣机的实

际价格目前低于二元竞争水平，但高于有效率竞争水平。而甲洗衣机厂的销量亦略高于二元竞争水平而低于有效率竞争的水平。

如果体制不改革，使竞争效率提高，则洗衣机生产不可能取得这样好的经济效果。如果洗衣机生产仍保持过去的卖方市场，少数几家企业垄断生产，则企业利润最大化的产量和价格与满足人民需要是矛盾的。因此要提高企业经济效果，使企业具有为人民服务的自发的动力，必须保护平等的有效率竞争。否则用计算机算出达到综合最优经济效果的产量和价格，企业也不会执行，因为在竞争效率不高时，利润最大化与整体最优经济效果矛盾，上级下达的利润指标与满足人民需要的产量指标就是互相矛盾的。如果有高效率的竞争，价格又是竞争价格，则企业追求利润能自动满足人民需求，这与整体最优经济效果并不矛盾。

甲洗衣机厂过去在原材料购买上处于被动地位，因为原材料和半成品仍存在卖方垄断，未形成有效率竞争的买方市场，所以价格过高，供应也不及时。本着提高竞争效率的原则，他们采纳武汉大学经济管理系咨询小组的建议，在原材料和半成品采购上采用招标手段，挑起原材料、半成品生产厂的竞争，结果价格马上降下来，供应数量、质量都提高，因而大大提高了经济效果。

这就是经济体制和竞争效率对经济效果的巨大影响。这种影响不但在企业的生产领域存在，尤其在银行、商业等领域存在。

例如当银行之间没有有效率竞争时，则一旦扩大企业自主权，企业手里钱就多了。这些钱不能用过去的财政手段集中起来，于是就分散使用在不少投资的边际收益较低的地方，

而投资边际收益很高的交通等重点部门却没有足够的资金。如果商业银行之间有高效率竞争，则通过利息率的浮动，银行会把分散的资金用经济手段吸引到边际收益最高的投资方向，因而使资金在所有部门的边际收益都相等，达到资金的最优分配。如果银行制度不能起到这种作用，则下放企业自主权后必然使资金分散，使资金不能实现最优分配，甚至效果比下放企业自主权前财政部门集中控制资金时还要差。因此银行体制的改革，商业银行之间竞争水平的提高是体制改革成败的关键之一。

## §6.4 价格集中控制和配给制对最优经济效果的影响

如果市场存在有效率竞争，则市场均衡价格可以自动调节供求量达到综合最优经济效果水平，但是生产技术条件是不断变化的，即生产函数不断变化，因而使供给函数不断变化。需求函数也随嗜好的变化而变化，这就使均衡价格和均衡供求量不断变化。如果价格保持不变，这不但对试错求解某一时刻的最优价格不利，而且不能适应最优价格的变化。

例如当生产技术进步，图6.1($a$)中的供给函数$S$下移至

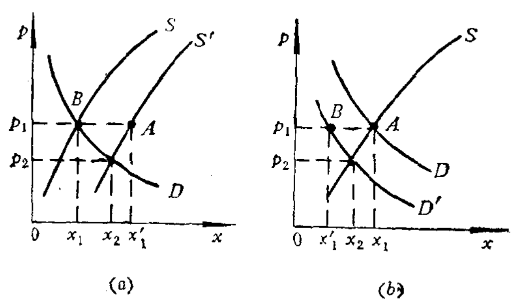



图 6.1

$S'$，或者当消费者嗜好（即效用函数）变化使图6.1（$b$）中的需求函数从$D$下移至$D'$，例如消费者不再喜欢留声机和胶鞋，则均衡价格会从$p_1$下降到$p_2$，而均衡供求量亦会从$x_1$变到$x_2$。如果价格体制太死板，物价管理部门集中控制价格，不能迅速地了解供给函数和需求函数的变动，不能灵活地将价格调节到$p_2$，而是保持$p_1$不变，则实际需求量在图（$a$）中仍保持为$x_1$，实际供给量却因技术改进而提高到$x_1'$，因此出现供过于求的剩余量（$x_1'-x_1$）。在图（$b$）中，价格保持$p_1$时，供给量仍在$x_1$，而需求量由于需求函数变动下降到$x_1'$，因此也出现了过剩量（$x_1-x_1'$）。如果计划部门为了保持供求平衡，对于图（$a$）的情形，下达产量指标$x_1$，则它不仅与按$p_1$计算的利润最大化产量$x_1'$发生矛盾，而且不是整体最优经济效果的最优产量$x_2$。也就是说上级下达的利润指标和产量指标互相打架。同样对于图（$b$）的情形，若计划部门下达产量指标$x_1'$，则它与按$p_1$计算的生产者利润最大化产量$x_1$发生矛盾，而且不符合最大限度满足人民需要的最优产量$x_2$。计划部门按$x_2$下达产量计划，如果价格仍保持在$p_1$，同样会发生产量指标与利润指标打架的事。这时扩大企业自主权，就会发生企业追求利润与满足市场需求发生矛盾。人民需要的产品无利可图，人民不需要的过剩产品，企业却拼命生产，而且企业也不可能知道真正的最优供求量$x_2$，连消费者也不知道他们的最优需求量$x_2$。因为$x_2$是要通过价格的灵活波动，通过反复试销，才能由市场这个大计算机迭代求解出来，价格不准动是很难求解出$x_2$的。

如果因为资源短缺图6.2（$a$）中的供给函数从$S$上移至$S'$，则均衡价格从$p_1$上升到$p_2$，均衡产量从$x_1$下降到$x_2$。如果价格保持在$p_1$不动，则需求量为$x_1$，供给量为$x_1'$，出现

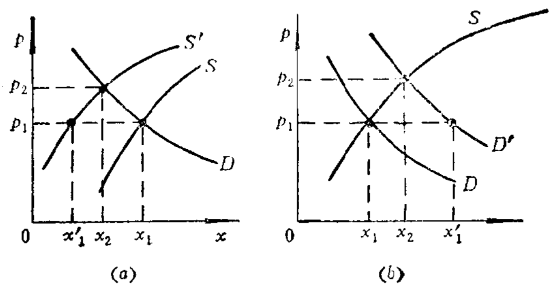



图 6.2

供不应求的短缺量（$x_1-x_1'$）。如果因为消费者收入增加或嗜好变化，图6.2(b)中的需求函数从$D$上升到$D'$，则均衡价格从$p_1$上升至$p_2$，均衡生产量从$x_1$上升到$x_2$，若价格保持在$p_1$不动，则供给量为$x_1$，需求量为$x_1'$，出现供不应求的短缺量（$x_1'-x_1$）。也就是说在价格保持为$p_1$时，消费者效用最大化的需求量大于生产者利润最大化的生产量。之所以出现供不应求，并不是说没有生产能力，而是价格体制不合理。这时消费者的需求量并不是综合最优经济效果的需求量，生产者的供给量更不是整体最优经济效果的供给量。究竟最优供求量是多少，这必须不断调节价格才能求解出来。

## §6.5 买方的独家经营

假设某企业是投入的唯一买主，但此种投入的生产者面临多个卖主的有效率竞争。这时此企业可以通过控制购买量来操纵价格，或干脆通过控制价格来影响市场的供给量。设作为生产资料投入的商品价格为$p$，其供给量为$x$，供给函数为

$$p=f(x),\quad f'(x)>0 \tag{6.5.1}$$

这个企业消耗此种投入的生产费用为

$$C=px=xf(x) \tag{6.5.2}$$

由于 $p$ 和 $x$ 都是变量，则边际费用为

$$\frac{dC}{dx}=xf'(x)+p \tag{6.5.3}$$

根据供给函数的正数特性，价格上升供给量亦上升，即 $f'(x)>0$。所以 $xf'(x)>0$，所以

$$\frac{dC}{dx}>p \tag{6.5.4}$$

也就是说均衡价格低于边际成本。

我们知道在整体最优经济效果条件下，均衡价格等于边际成本。可见在买方独家经营时，买主会利用他的垄断地位压低原料价格。由于供给函数的正数特性，当价格低于Pareto最优价格时，供给量亦会低于Pareto最优供给量。这个企业用此种投入要生产产出，由于投入低于Pareto最优水平，在技术条件一定时，产出亦会低于Pareto最优水平。因此不但产品的卖方独家经营会使产品供给低于最优水平，而且生产资料的买方独家经营也会使最终产品供给低于最优水平。很多人只看得见最终产品卖方独家经营的坏处，却看不到生产资料（中间产品）卖方独家经营的坏处，更看不到生产资料（原材料或中间产品）买方独家经营的坏处。目前经过体制改革最终产品的卖方独家经营已不太多了，但生产资料的卖方独家经营和买方独家经营对经济效果的提高仍起着很大的阻碍作用。

如果上述企业的产出为 $y$，相应的价格为 $r$，设这个企业在产出商品市场上也是独家经营，若产出的需求函数为

$$r=\varphi(y) \tag{6.5.5}$$

这个企业的利润函数为

$$\pi = ry - px \tag{6.5.6}$$

由于它能控制产出价格 $r$ 和投入价格 $p$， $r$，$p$ 都不是常数，而是变量，所以利润最大化的条件为

$$\frac{d\pi}{dx} = r\frac{dy}{dx} + \frac{dr}{dy}\frac{dy}{dx}y - \left(p + x\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

即

$$\left(r + y\frac{dr}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p \tag{6.5.7}$$

$\frac{dy}{dx}$为投入的边际产出，可从生产函数

$$y = y(x) \tag{6.5.8}$$

导出。式（6.5.7）中等号左边括号内的式子为单位边际产出的边际收益，它与边际产出 $\frac{dy}{dx}$ 之积为边际产出的边际收益。等号右边为边际费用。

由于产出价格 $r$ 高于 Pareto 最优价格，所以卖方独家经营通过垄断使社会总体经济效益受到损失，而由于在投入的买方独家经营条件下，投入价格低于 Pareto 最优水平，所以这个企业通过投入的买方垄断也使社会总体经济效益受到损失。这种既有买方独家经营又有卖方独家经营的经济活动对实现全社会综合最优经济效果的干扰最大。

**例** 第二次世界大战后德国经济困难，军管当局以为配给制、价格、工资固定不变能解决暂时的困难，但实际实行这些体制的结果使价格功能失灵，经济越来越困难。后来艾哈德在一夜之间恢复自由价格，自由工资制度，经济在极短的时间内繁荣起来，创造了价格制度妙手回春的惊人奇迹。

# 参考文献


Adelman, I., S. Robinson(1978), *Income Distribution Policies in Developing Countries*, Stanford University.

Adelman, I. (1969), *Practical Approaches to Development Planning: the Case of Korea*, John Hopkings.

Allen, R. G. D. (1959), *Mathematical Economics* Macmillan.

Allen, R. G. D. (1938), *Mathematical Analysis for Economists* Macmillan.

Archibald, G. C. (1976), *An Introduction to Mathematical Economics: Methods and Application*, Harper & Row.

Arrow, K. J. (1971), *General Competitive Analysis*.

Arrow, K. J. (1963), *Social Choice and Individual Values* John Wiley & Sons.

Arrow, K. J. and G. Debreu(1964), "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica* 22.

Arrow, K. J., H. Chenery, B. Minhas, and R. M. Solow(1961), "Capital-Labor Sabstitution and Economic Efficiency", *The Review of Economics and Statistics*, 43.

Arrow, K. J., H. Block, and L. Hurwicz(1959), "On the Stability of the Competitive Equilibrium II", *Econometrica* 27.

Arrow, K. J., and L. Hurwicz (1958), "On the Stability of the Competitive Equilibrium I", *Econometrica*, 26.

Arrow, K. J., and G. Debreu (1954), "Existence of an Equlibrium for a Competitive Economy", *Econometrica* 22.

Aumann, R. (1966), "Existence of Competitive Equilibrium in Market With a Continuim of Traders", *Econometrica*, 34.

Bowen, R. (1968), "A New Proof of a Theorem in utility Theory" *International Economic Review* 9.

Brown, A., and A. Deatou(1972), "Survey in Applied Economics Models of Consumer Behaviour", *Economic Journal*, 82.

Chenery, H. B. (1971), *Studies in Development Planning*.

Chenery, H. B., and P. G. Clark(1959), *Interindustry Economics*, John Wiley & Sons.

Chow, G. C. (1975), *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, John Wiley & Sons.

Christensen, L. R. (1975), "Transcendental Logarithmic Utility Functions", *American Economic Review*, 65.

Dantzig, G. B. (1963), *Linear Programming and Extensions*, Princeton University.

Dantzig, G. B., and P. Wolfe(1961), "The Decomposition Algorithm for Linear Programming", *Econometrica*, 29.

Deaton, A. S., and J. Muellbauer(1980), "An Almost Ideal Demand Systems", *American Economic Review*, 70.

Deaton, A. S. (1974), "The Analysis of Consummer Demand in the United Kingdom 1900-1970", *Econometrica*, 42.

Debreu, G. (1974), "Excess Demand Functions", *Journal of Mathematical Economics*, 1.

Debreu, G. (1963), "On a Theorem of Scarf", *Review of Economic Studies*, 30.

Debreu, G., and H. Scarf(1963), "A limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review*, 4.

Debreu, G. (1959), *Theory of Value*, John-Wiley & Sons.

Denison, E. F. (1979), *Accounting for Slower Economic Growth.*

Denison, E. F. (1976), *How Japan's Economy Grew So Fast.*

Denison, E. F. (1974), *Accounting for United States Economic Growth,* 1929-1969.

Denison, E. F. (1972), "Surveys in Applied Economics: Technical Progress", *The Economic Journal*. March.

Dervis, K., J. Melo, and S. Kobinson(1982), *General Equilibrium Models for Development Policy*, Cambridge.

Dofman, R., P. A. Samuelson, and R. M. Solow(1958), *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw-Hill.

Dorfman, R. (1951), *Application of Linear Programming to Theory of the Firm*, California.

Farrell, M. (1959), "The Convexity Assumption in the Theory of Competitive Markets", *Journal of Political Economy* 67.

Frisch, R. (1965), *Theory of Production*, Rand-McNally.

Frisch, R. (1959), "A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model With Many Sectors", *Econometrica*, 27.

Gale, D. (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-

Hill.

Ginsburgh, V. (1980), *Activity Analysis and General Equilibrium Modeling*, Amsterdam Holland.

Ginsburgh, V. (1978), *Computational Experience With a Large General Equilibrium Model*, Amsterdam Holland.

Goreux, L. M. (1973), *Multi-level planning: Case Studies in Mexico*, North-Holland.

Greenberg, M. R. (1976), *Applied Linear Programming for the Socioeconomic and Environmental Sciences*.

Kantorovich, L. V. (1959), *The Best Use of Economic Kesources*.

Kemen, J. G., O. Morgenstern, and G. L. Thompson (1956), "A Generalisation of the von Neuman Models of an Expanding Economy", *Econometrica*, 24.

Kendrick, D. A. (1978), *The Planning of Industrial Investment Programs——A Methodology*, Johns Hopkings.

Kendrick, J. W. (1980), *Productiving in the United States: Trends and Cycles*.

Kogiku, K. C. Microeconomic Models.

Koopmans, T. C. (1957), *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill.

Koopmans, T. C., ed. (1951), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons.

Leontief, W. W. (1966), *Input-Output Economics*, Oxford.

Little, I. M. D., and J. A. Mirrless(1980), *Project Appraisal and Planning for Developing Countries*.

Lluch, C. (1977), *Patterns in Household Demand and Saving*, Oxford.

Lysy, F. (1980), "A Computable General Equilibrium Model for the Functional Distribution of Income: Experiments for Brazil, 1959-71", in Taylor et al., *Models of Growth and Distribution for Brazil*.

Mckenzie, L. (1959), "On the Existence of General Equilibria for a Competitive Economy", *Econometrica*, 27.

Negishi, T. (1962), "The Stability of a Competitive Equilibrium: A Surveg Article", *Econometrica*, 30.

Nerlove, M. (1967), "Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Function", in *The Theory and Empirical Analysis of Production*, National Bureau of Economic Research ed. Columbia

University.

Nerlove, M. (1965), *Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions*, Rand McNally.

Nikaido, H. (1970), *Introduction to Sets and Mapping in Modern Economics*.

Nikaido, H. (1968), *Covex Structure and Econorny Theory*, Academic Press.

Quirk, J., and R. Saposnik (1968), *Introduction to General Equlibrium Theory and Welfare Economics*, McGraw-Hill.

Samuelson, P.A. (1950), "The Problem of Integrability in Utility Theory", *Economica*, 17.

Samuelson, P.A. (1948), "Comsuption Theory in Terms of Revealed Preference", *Economica*, 15.

Samuelson, P.A. (1947), *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University.

Samuelson, P.A. (1941), "The Stability of Equilibrium Comparative Statics and Dynamics", *Econometrica*, 9.

Scarf, H. (1977), "The Computation of Equilibrium Prices: An Exposition", *Cowles Foundation Discussion*.

△ Scarf, H. (1973), *The Computation of Economic Equilibrium*, Yale University.

△ Scarf, H. (1969), "An Example of an Algorithm for Calculating Equilibrium Prices", *American Economic Review*, 59.

Scarf, H. (1967), "The Core of an N Person Game", *Econometrica*, 35.

Stone, R.N. (1954), "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand", *Economic Journal*, 64.

▲ Shoven, J. (1974), "On the Computation of Competitive Equilibria on International Markets with Tariff", *Journal of International Economics*, 4.

Theil, H. (1976), *Theory and Measurement of Consummer Demand*.

Theil, H. (1965), "The Information Approach to Demand Analysis", *Econometrica*, 33.

Takayama, A. (1974), *Mathematical Economics*.

Uzawa, H. (1961), "The Stability of Dynamic Processes", *Econometrica*, 29.

Walters, A.A. (1963), "Production and Cost Function: An Econometric Survey", *Econometrica*, 31.

F22
16

276476